

Eenvoudige gevallen van interferentie en diffractie

- § 1 Interferentie bij twee puntbronnen
- § 2 Intensiteit en amplitude
- § 3 Interferentie in het verre veld bij twee puntbronnen
- § 4 Interferentie in het verre veld bij een rij puntbronnen
- § 5 Buiging (diffractie) van golven
- § 6 Principe van Huygens
- § 7 Buiging van een golf door een spleet
- § 8 Een golf door meerdere spleten
- § 9 Principe van Babinet
- § 10 Coherentie van licht
- § 11 Temporele coherentielengte en spatiële coherentiebreedte

Bijlagen

§ 1 Interferentie bij twee puntbronnen

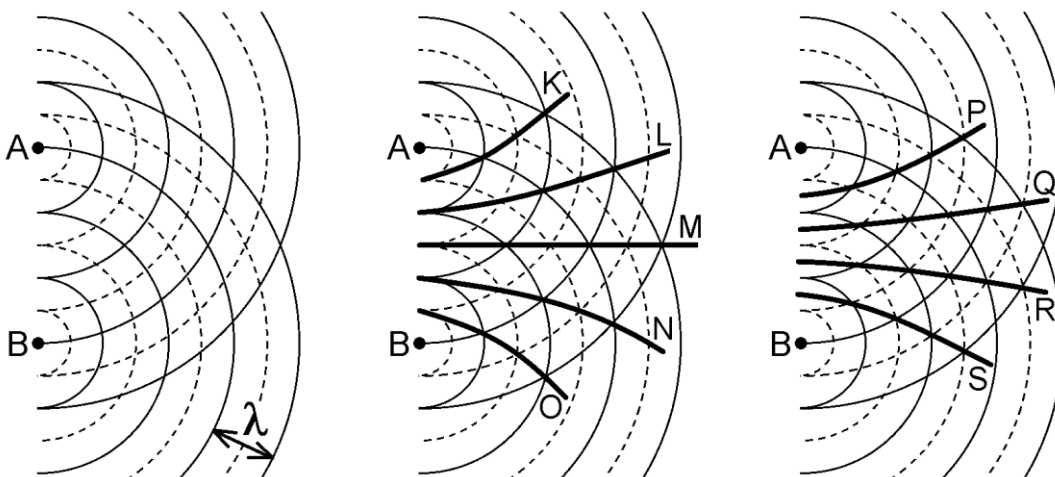
Superpositiebeginsel

Als twee oppervlaktegolven, bijvoorbeeld golven op een wateroppervlak, elkaar kruisen, geldt in elk punt en op elk tijdstip dat de resulterende uitwijking gelijk is aan de optelsom van de uitwijkingen van de afzonderlijke golven. Stel bijvoorbeeld dat op een bepaalde plaats de uitwijking van de ene golf 0,30 m en van de andere golf 0,20 m is, dan is de totale uitwijking daar dus 0,50 m. Dit noemen we het principe van 'superpositie'.

Het superpositiebeginsel (of superpositieprincipe) geldt niet alleen voor watergolven maar voor alle soorten golven, bijvoorbeeld ook voor geluidsgolven en lichtgolven. Stel bijvoorbeeld dat twee geluidsgolven in een ruimte elkaar kruisen. Als (op een bepaalde plaats en op een bepaald tijdstip) de ene geluidsgolf een overdruk van 0,30 Pa geeft en de andere geluidsgolf een onderdruk van 0,20 Pa, dan is de uiteindelijke overdruk daar en op dat moment 0,10 Pa. Ook geldt het superpositiebeginsel voor meer dan twee elkaar kruisende golven.

Interferentie van golven

In de onderstaande linker figuur zijn twee trillingsbronnen A en B getekend die ieder een bolvormige golf opwekken die van zijn bron af beweegt. Bronnen A en B trillen met dezelfde frequentie en zijn 'in fase' met elkaar. Dat wil zeggen dat B een golfberg uitzendt op het moment dat A ook een golfberg uitzendt (analoog voor golfdalen) en dat de nuldoorgangen ook gelijktijdig zijn. Tenslotte nemen we aan dat A en B ook met dezelfde amplitude trillen. Anders gezegd: de opgewekte golven zijn even sterk. In de figuur stellen de doorgetrokken cirkels de toppen van de golfbergen voor en de onderbroken cirkels de laagste punten van de golfdalen. De afstand tussen twee aangrenzende doorgetrokken cirkels is gelijk aan de golflengte λ . Merk op dat de figuur een momentopname van het golfpatroon is want de cirkels bewegen naar buiten.



De middelste figuur is gelijk aan de linker figuur, maar vijf extra zogenoemde 'buiklijnen' zijn er in getekend; hier aangeduid met de letters K tot en met O. De buiklijnen lopen door de snijpunten van de doorgetrokken cirkels en ook door de snijpunten van de onderbroken cirkels. Bij alle punten op een buiklijn versterken de door A en B opgewekte golven elkaar en is de resulterende amplitude dus maximaal.

De afstand van A naar een willekeurig punt van buiklijn M (= de middelloodlijn op het lijnstuk AB) is gelijk aan de afstand van B naar datzelfde punt. We zeggen dat het weglengteverschil voor de golven uit A en B nul is. Het weglengteverschil uit A en B naar een willekeurig punt van buiklijn L of N bedraagt precies één golflengte en naar een willekeurig punt van buiklijn K of O precies twee golflengtes. Steeds komen de golven uit A en B in fase aan bij een punt op een buiklijn.

De rechter figuur is ook gelijk aan de linker figuur, maar nu zijn er vier zogenoemde 'knooplijnen' (P, Q, R en S) in getekend. De knooplijnen lopen door de snijpunten van doorgetrokken cirkels met de onderbroken cirkels. Bij alle punten op een knooplijn verzwakken de door bronnen A en B opgewekte golven elkaar en is de amplitude in die punten minimaal. Zo is de afstand van bron A naar een willekeurig punt van knooplijn Q een halve golflengte kleiner dan de weglengte van bron B naar dat punt. De golven die uit A en B komen, zijn dus in tegenfase met elkaar. Iets soortgelijks geldt voor de andere knooplijnen.

De amplitude op de knooplijnen is in het algemeen niet exact nul. Een voorwaarde voor volledige uitdoving is namelijk dat de amplitudes van beide golven gelijk moeten zijn. Echter, de amplitude van een golf die van een puntbron af beweegt, neemt geleidelijk af. Omdat alle punten van de knooplijnen verschillende afstanden tot A en tot B hebben, zijn de amplitudes altijd iets verschillend.

Tot nu toe spraken we van buiklijnen en knooplijnen. In het driedimensionale geval zijn dit echter buik- en knoopvlakken. Alle punten van een buikvlak of knoopvlak hebben hetzelfde verschil in afstand tot de twee trillingsbronnen A en B. We zeggen dat het weglengteverschil voor de golven uit A en B gelijk is.

Samenvatting

Als twee puntvormige trillingsbronnen A en B in fase met elkaar zijn, geldt het volgende.

1)

Bij de buiklijnen (buikvlakken) heeft de resulterende golf een maximum amplitude. De golven uit A en B komen bij elk punt P van een buiklijn in fase aan en versterken ze elkaar daar dus. Er geldt:

$$AP - BP = n \cdot \lambda \quad \text{met} \quad n = 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3 \text{ enzovoort.}$$

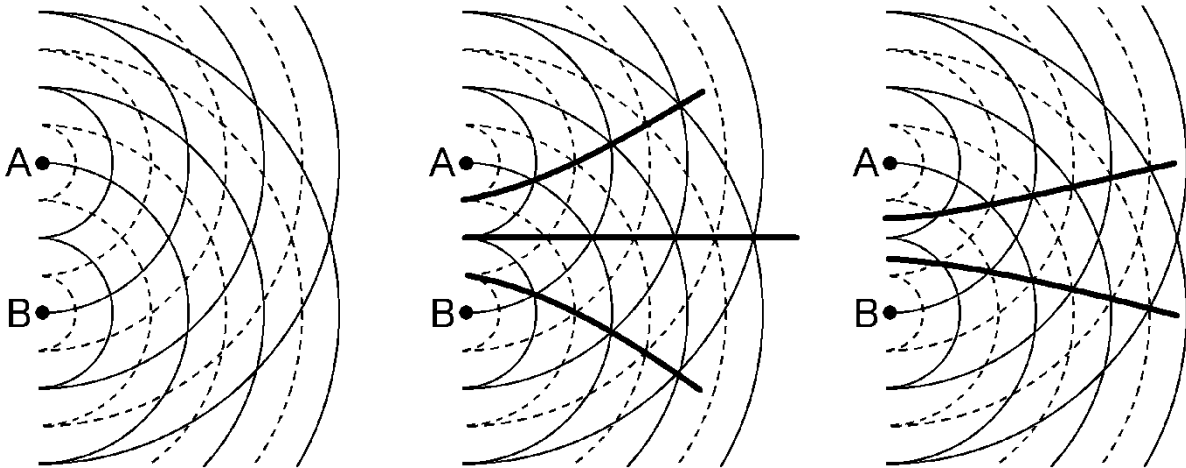
2)

Bij de knooplijnen (knoopvlakken) heeft de resulterende golf een minimum amplitude. De golven uit A en B komen bij elk punt P van een knooplijn in tegenfase aan en verzwakken ze elkaar daar dus. Er geldt:

$$AP - BP = \lambda/2 + n \cdot \lambda \quad \text{met} \quad n = 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3 \text{ enzovoort.}$$

Kleinere afstand tussen de trillingsbronnen

De onderstaande figuren zijn in principe gelijk aan de bovenstaande figuren. Het enige verschil is dat de afstand tussen de bronnen een stuk kleiner is. Merk op dat de afstand AB nu nog maar twee golflengtes is, terwijl die eerst drie golflengtes was. Zoals goed uit de figuren blijkt, is het gevolg hiervan dat de buik- en knooplijnen sterker divergeren.



Interferentie en coherentie

Bij de bovenstaande gevallen spreken we van interferentie. Kenmerkend hierbij is dat er meerdere trillingsbronnen zijn die met dezelfde frequentie trillen. Er zijn plaatsen met een grotere amplitude (constructieve interferentie) en plaatsen met een kleinere amplitude of met (bijna) volledige uitdoving (destructieve interferentie). In principe hoeven de trillingsbronnen niet in fase te zijn; alleen zijn de buik- en knooplijnen dan verschoven ten opzichte van de buik- en knooplijnen in de bovenstaande voorbeelden. Interferentie kan optreden bij elektromagnetische golven, geluidsgolven, watergolven, et cetera.

We zeggen dat twee trillingsbronnen coherent zijn, als ze dezelfde constante frequentie hebben en hun faseverschil constant blijft. Met dat laatste wordt bedoeld dat als de ene bron bijvoorbeeld iets eerder door zijn evenwichtsstand gaat dan de andere bron, dit bij de volgende trillingen ook steeds het geval is. Het woord coherent komt uit het Latijn en betekent “aan elkaar klevend”. Stel dat de ene trillingsbron met 5000,0 Hz trilt en de andere met 5000,1 Hz. Beide frequenties zijn dan praktisch gelijk aan elkaar maar het faseverschil verandert voortdurend en de bronnen zijn dan ook niet coherent. Coherente trillingsbronnen geven een constant interferentiepatroon, dus waarbij de plaatsen van de knopen en de buiken gelijk blijven.

Opgaven bij § 1

Opgave 1

Twee puntvormige trillingsbronnen A en B hebben dezelfde frequentie en trillen in fase. Bovendien hebben A en B dezelfde amplitude.

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar of niet waar zijn.

a.

Op de buiklijnen is de (resulterende) amplitude maximaal.

b.

Op de knooplijnen is de (resulterende) amplitude minimaal.

c.

Op elke knooplijn is de (resulterende) amplitude exact nul.

d.

Het weglengteverschil van A en B naar een willekeurig punt op een buiklijn is een geheel aantal (inclusief nul) keer de golflengte.

e.

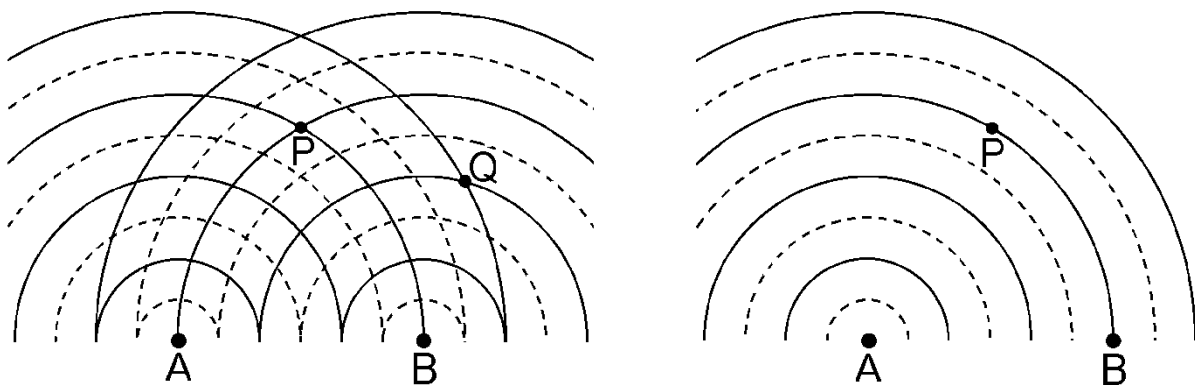
Als A en B eerst in fase en daarna in tegenfase trillen, worden de buiklijnen knooplijnen en andersom.

f.

Als de afstand tussen A en B groter wordt gemaakt, gaan de buiklijnen sneller uit elkaar lopen (divergeren).

Opgave 2

In de onderstaande linker figuur zijn A en B trillingsbronnen die bolvormige golven uitzenden. Hierbij stellen de doorgetrokken lijnen golfbergen voor en de stippellijnen golfdalen. A en B trillen in fase met gelijke amplitude. Op het moment van de tekening zenden A en B een golfberg uit.



a.

Hoe kun je zien dat de punten P en Q op een buiklijn liggen?

b.

Bepaal het weglengteverschil van A en B naar punt Q. Druk dit weglengteverschil uit in de golflengte.

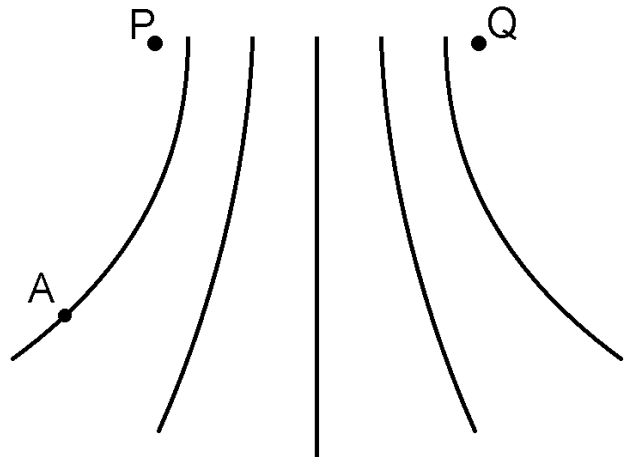
In de rechter figuur is bron B uitgezet.

c.

Bepaal de verhouding van de amplitude in punt P in de linker en in de rechter figuur.

Opgave 3

In de figuur hiernaast zijn P en Q twee puntvormige trillingsbronnen die cirkelgolven uitzenden. P en Q trillen met dezelfde frequentie en zijn in fase met elkaar. Door interferentie ontstaan er buiklijnen. In de figuur zijn alle buiklijnen tussen P en Q getekend. Voor het punt A op één van de buiklijnen geldt: $AP = 8,4 \text{ cm}$ en $AQ = 12,0 \text{ cm}$. Bepaal de golflengte van de cirkelgolven.

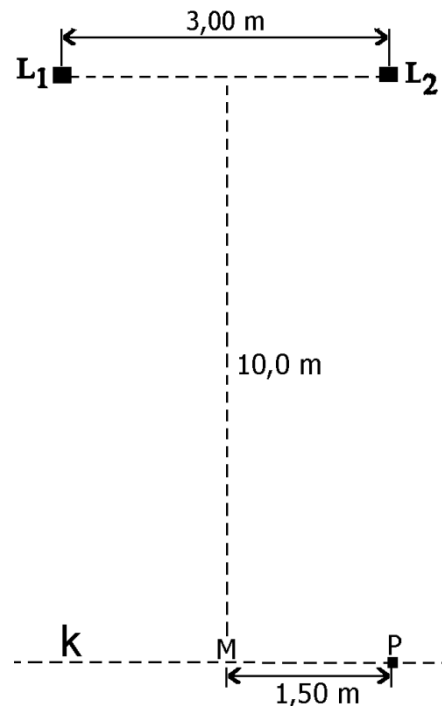


Opgave 4

Twee kleine identieke luidsprekers L_1 en L_2 hebben een onderlinge afstand van $3,00 \text{ m}$. Zie de figuur hiernaast (niet op schaal!). De twee luidsprekers zijn in fase aangesloten op een toongenerator, die een sinusspanning voortbrengt. Een microfoon wordt van links naar rechts bewogen langs lijn k evenwijdig aan lijnstuk L_1L_2 . De afstand tussen deze lijn en lijnstuk L_1L_2 bedraagt $10,0 \text{ m}$.

a.

Leg uit dat in punt M op de middelloodlijn van L_1L_2 de geluidsgolven elkaar versterken.



Rechts van punt M ligt het tweede minimum in punt P (het eerste minimum ligt tussen M en P in). De afstand tussen M en P bedraagt 1,50 m.

b.

Laat zien dat $L_1P - L_2P = 44 \text{ cm}$.

c.

Bereken de frequentie van het geluid, als de geluidssnelheid 332 m/s bedraagt.

d.

Leg uit waarom in P geen volledige stilte heerst.

§ 2 Intensiteit en amplitude

Intensiteit en vermogen

In de volgende paragrafen spreken we vaak over de intensiteit van de golf in plaats van over de amplitude van de golf. Simpel gezegd geeft de intensiteit op een bepaalde plaats in de ruimte aan hoeveel energie er daar door de golf vervoerd wordt. Voor een lopende golf (in een driedimensionale ruimte), die een denkbeeldig oppervlak in loodrechte richting passeert, geldt per definitie:

$$I = \frac{P}{A}.$$

Hierin is I de intensiteit, P het passerende vermogen (P = power) en A de oppervlakte (A = area).

De grootte intensiteit wordt onder andere in de akoestiek gebruikt. Als vuistregel geldt dat de minimale geluidsintensiteit, die voor het menselijk oor net waarneembaar is, ongeveer 10^{-12} watt per vierkante meter bedraagt. Het geluidsvermogen dat bij die intensiteit op een oorschelp met een oppervlakte van 10 vierkante centimeter valt, kan dan als volgt berekend worden.

$$P = I \cdot A = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 10^{-15} \text{ W}$$

Ook bij straling, afkomstig van de zon, gebruikt men het begrip intensiteit. De zon zendt per seconde $3,85 \cdot 10^{26}$ joule aan straling uit. Het stralingsvermogen van de zon is dan dus:

$$P = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ watt.}$$

Om de stralingsintensiteit op een afstand r van de zon te berekenen, nemen we rond de zon een denkbeeldige bolschil met straal r . Zie de figuur hiernaast. Bij de aarde geldt:

$$r = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m.}$$

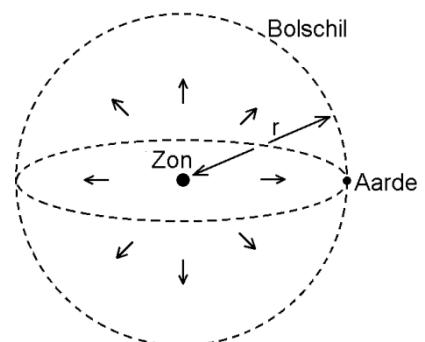
Voor de oppervlakte A van de bolschil geldt dan:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (1,50 \cdot 10^{11})^2 = 2,83 \cdot 10^{23} \text{ m}^2.$$

Als we aannemen dat de zonnestraling in alle richtingen even sterk is, geldt voor de intensiteit ter plaatse van de aarde:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}}{2,83 \cdot 10^{23} \text{ m}^2} = 1,4 \text{ kW/m}^2.$$

Merk op dat als de afstand tot de zon wordt verdubbeld, de oppervlakte van de bolschil vier keer zo groot is en de intensiteit dus vier keer zo klein wordt.



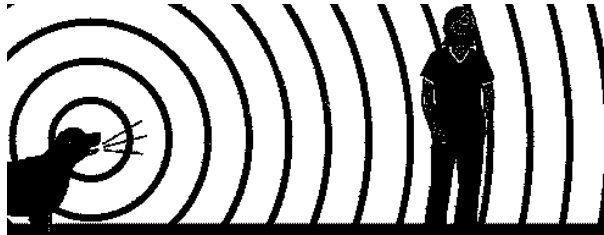
Intensiteit en amplitude

Tussen de intensiteit van een golf en de amplitude van de trilling geldt het volgende verband.

De intensiteit is evenredig met het kwadraat van de amplitude.

Dit wil bijvoorbeeld zeggen dat als de amplitude twee keer zo groot wordt, de intensiteit vier keer zo groot wordt. Ook geldt bijvoorbeeld dat als de intensiteit twee keer zo klein wordt, de amplitude wortel twee keer zo klein wordt.

Stel bijvoorbeeld dat een hond aan het janken is en daarbij een constant geluid voortbrengt. Zie de figuur hiernaast. Als reflecties van het geluid tegen de grond buiten beschouwing worden gelaten, geldt dat als je twee keer zo ver van de hond af gaat staan, de intensiteit vier



keer zo klein wordt. Dit kun je begrijpen met twee denkbeeldige bolschillen om de hond waarvan de buitenste bolschil een twee keer zo grote straal en dus een vier keer zo groot oppervlak heeft als de binnenste bolschil. Omdat de intensiteit vier keer zo klein wordt, wordt de amplitude van de geluidstrilling twee keer zo klein.

Opgaven bij § 2

Opgave 1

Een bepaald type laser zendt een laserstraal uit met een vermogen van 1,0 mW. Dichtbij de laser is de oppervlakte van de doorsnede van de lichtbundel 2 mm^2 .

a.

Bereken op die afstand de (gemiddelde) intensiteit van de lichtbundel.

Naarmate de lichtbundel meer afstand heeft afgelegd, wordt hij breder. Stel dat de oppervlakte van de doorsnede van de lichtbundel op grote afstand 10 keer zo groot is.

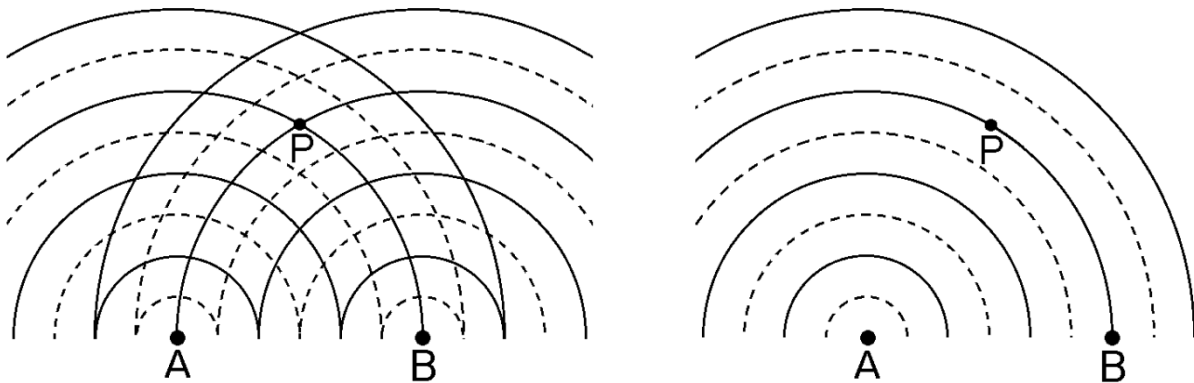
b.

Hoeveel keer wordt de intensiteit van de lichtbundel dan kleiner?

Hoeveel keer wordt de amplitude van de lichttrilling dan kleiner?

Opgave 2

In de onderstaande figuren zijn A en B trillingsbronnen die bolvormige golven kunnen uitzenden. Punt P ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB. In de linker figuur trillen A en B in fase met gelijke amplitude. P ligt dan dus op een buiklijn. In de rechter figuur is bron B uitgezet.



Bij de volgende vragen kijken we naar de golf in punt P.

a.

Bepaal de verhouding van de amplitude in de linker en in de rechter figuur.

b.

Bepaal de verhouding van de intensiteit in de linker en in de rechter figuur.

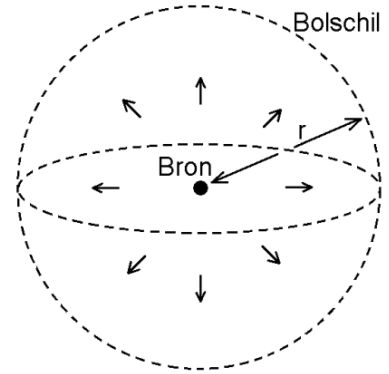
c.

Neem aan dat bron B een halve trilling achterloopt op bron A.

Wat kun je dan over de amplitude en de intensiteit in punt P zeggen?

Opgave 3

In de figuur hiernaast wekt een geluidsbron een geluidsgolf op die zich in alle richtingen voortplant. Het door de bron uitgezonden geluidsvermogen is P . Het geluid passeert een denkbeeldige bolschil die de bron als middelpunt heeft. De bolschil heeft straal r en oppervlakte A .



a.

Druk de geluidsintensiteit I ter plaatse van de bolschil uit in P en A .

b.

Druk de geluidsintensiteit I ter plaatse van de bolschil uit in P en r .

c.

Vul nu op de open plek in de volgende regel een getal in.

Als de afstand tot de geluidsbron twee keer zo groot wordt, wordt de intensiteit van de geluidsgolf keer zo klein.

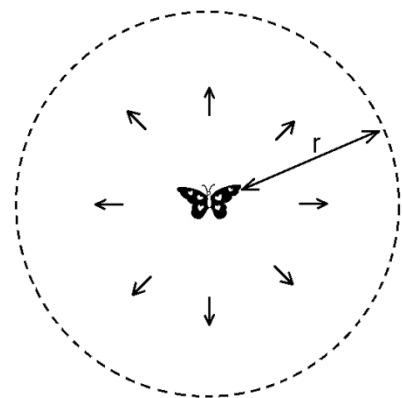
d.

Vul nu op de open plek in de volgende regel een getal in.

Als de afstand tot de geluidsbron twee keer zo groot wordt, wordt de amplitude van de geluidsgolf keer zo klein.

Opgave 4

In de figuur hiernaast bevindt een vlinder zich in een vijver en laat het wateroppervlak op en neer gaan. Een cirkelvormige golf op het wateroppervlak breidt zich naar buiten toe uit. De amplitude van de golf wordt kleiner naarmate de afstand tot de vlinder groter wordt. In deze opgave proberen we het verband tussen de amplitude en de afstand te vinden.



Het door de vlinder uitgezonden golfvermogen is P . De golven passeren een denkbeeldige cirkel met de vlinder als middelpunt. De cirkel heeft straal r en omtrek L . De intensiteit bij (driedimensionale) ruimtegolven heeft bij oppervlaktegolven een analogon: het passerende vermogen per lengte-eenheid. In deze opgave is dat P / L . Neem aan dat deze grootheid, net als de intensiteit, evenredig is met het kwadraat van de amplitude.

Vul nu op de open plekken in de volgende regels een getal in.

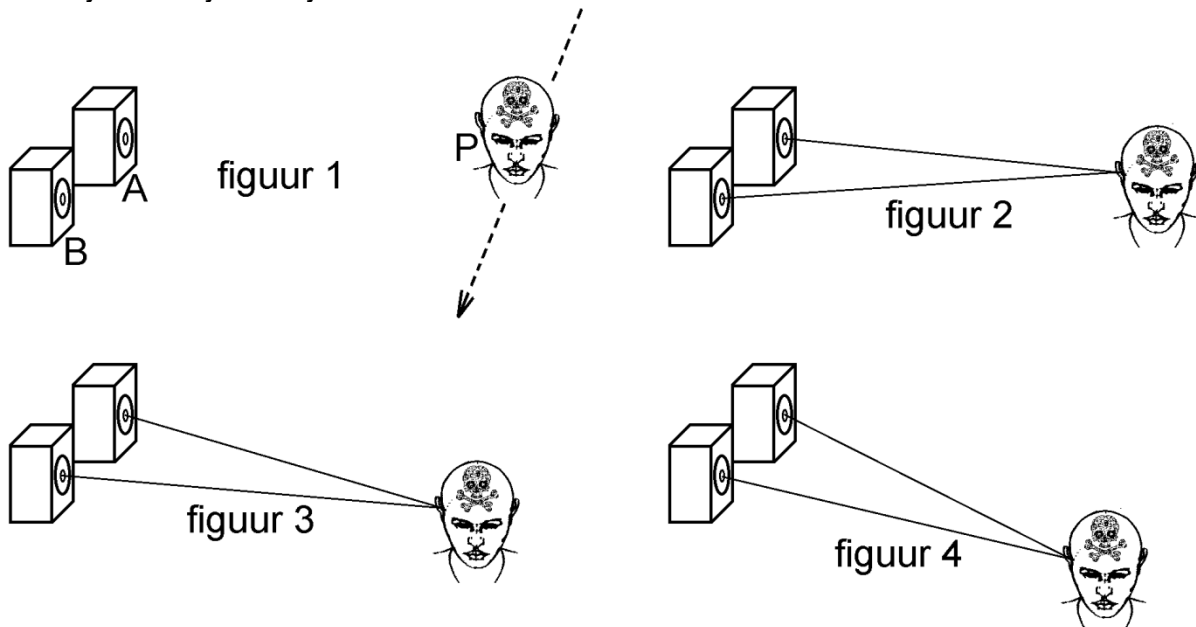
Als de afstand tot de vlinder twee keer zo groot wordt, wordt P / L van de watergolf keer zo klein.

Als de afstand tot de vlinder twee keer zo groot wordt, wordt de amplitude van de watergolf keer zo klein.

§ 3 Interferentie in het verre veld bij twee puntbronnen

Langs twee coherente geluidsbronnen lopen

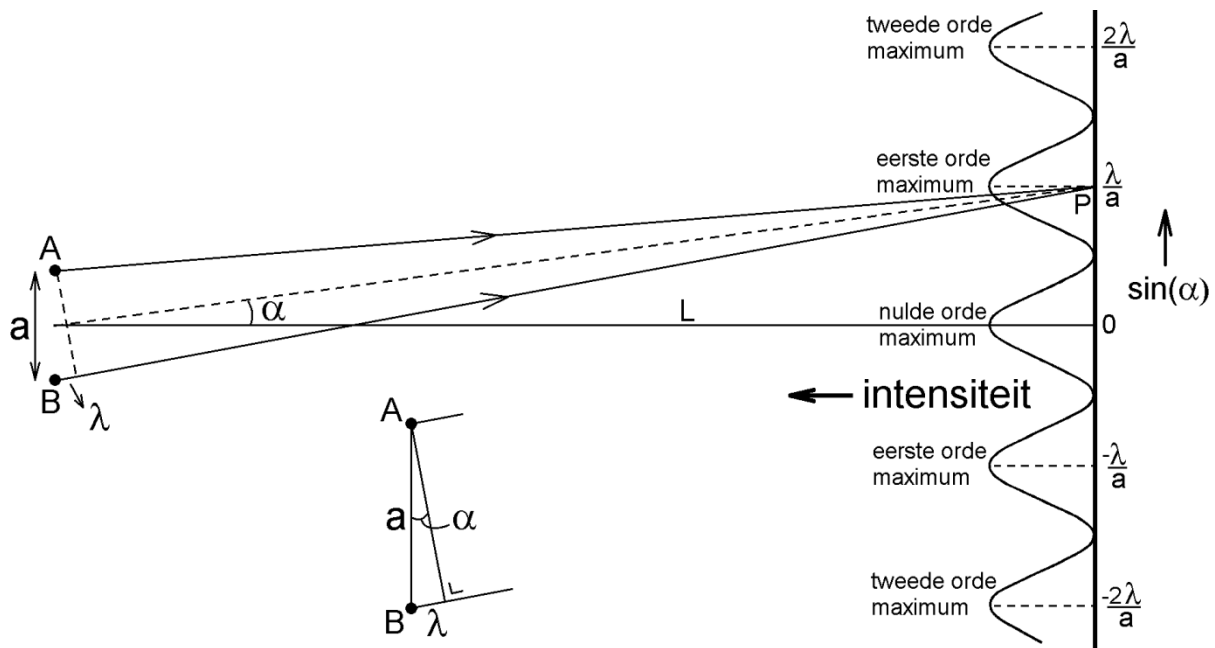
In de onderstaande figuren loopt een man langzaam langs twee luidsprekers A en B. Deze brengen een zuivere toon voort (dus één frequentie) en trillen in fase. De twee luidsprekers zijn dus coherent. In figuur 1 is de looprichting van de man aangegeven. Het blijkt dat hij met zijn rechter oor P de toon afwisselend hard en zacht hoort.



In figuur 2 bevindt P zich op gelijke afstand tot beide luidsprekers. De geluidsgolven komen in fase bij P aan en de man hoort een luide toon. In figuur 3 is de weglengte van A tot P een halve golflengte langer dan de weglengte van B tot P. De man hoort de toon dan niet of nauwelijks. In figuur 4 hoort hij de toon weer luid omdat het weglengteverschil (dus $AP - BP$) één golflengte bedraagt. Als de man verder loopt, blijven de versterkingen en verzwakkingen van het geluid elkaar afwisselen. In de rest van deze paragraaf gaan we ervan uit dat de afstand tussen de man en de luidsprekers zo groot is, dat we van het 'verre veld' kunnen spreken.

Interferentiepatroon van twee bronnen in het verre veld

In de onderstaande figuur trillen twee puntbronnen A en B met dezelfde frequentie en amplitude en zijn in fase met elkaar. De afstand tussen de bronnen is met a aangegeven. Het verloop van de intensiteit van het resulterende golfpatroon langs een ver verwijderd observatievlak (evenwijdig aan lijnstuk AB) is ook weergegeven. Bij bepaalde punten van het vlak is de intensiteit maximaal en bij andere punten is de intensiteit minimaal. We hebben geleerd dat dit veroorzaakt wordt door het weglengteverschil van de bronnen A en B naar de verschillende punten op het observatievlak.



In de figuur zijn verbindinglijnen getrokken van de bronnen A en B naar een willekeurig punt P van het observatievlak. We gaan ervan uit dat het observatievlak in verhouding zeer ver van de bronnen verwijderd is. In feite eisen we dat de lijnen AP en BP als evenwijdig opgevat kunnen worden. We spreken dan van het 'verre veld'. Zoals duidelijk te zien is, voldoet de getekende opstelling niet aan deze eis.

Als het weglengteverschil (dus het verschil tussen AP en BP) gelijk is aan één golflengte λ , dan versterken de door de bronnen opgewekte golven elkaar in P en is er in P dus een maximum van de intensiteit. In de figuur (met name in de uitvergroting) is eenvoudig te zien, dat voor de afbuighoek α dan geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{a}.$$

De bronnen versterken elkaar ook in punt P als het weglengteverschil een veelvoud van de golflengte λ is. Er is in P dus een maximum van de intensiteit als geldt:

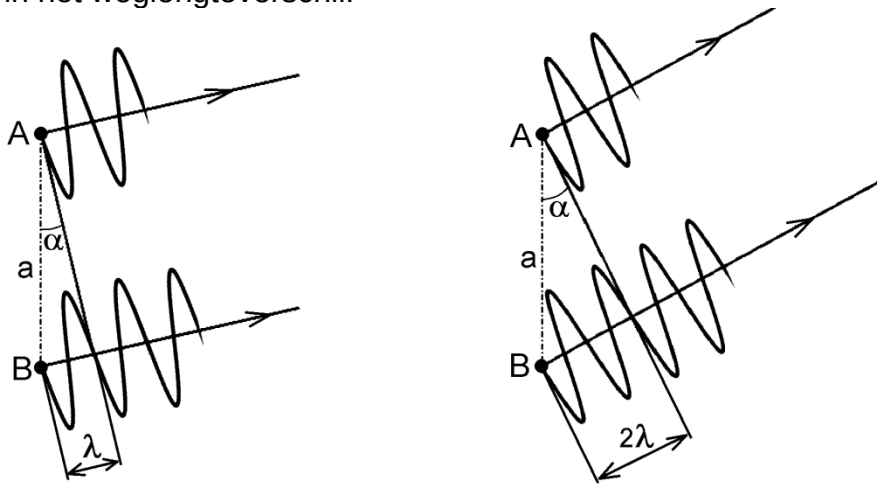
$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}} \quad \text{met } n = \text{geheel getal (.... -2, -1, 0, 1, 2,)}$$

We noemen n de orde. Zo spreken we van het nulde orde maximum, eerste orde maximum enzovoort. In de bovenstaande figuur is het middelste maximum, dus bij $\sin(\alpha) = 0$, het nulde orde maximum en de daarnaast gelegen maxima de eerste orde maxima.

Merk op dat, als de twee bronnen zich dichterbij elkaar bevinden (a dus kleiner), de maxima van het interferentiepatroon (bij het observatievlak) verder uit elkaar liggen. Dit hadden we in de eerste paragraaf ook reeds gezien, want daar divergeerden de buiklijnen sterker bij een kleinere afstand tussen de bronnen.

Weglengteverschil bij het eerste en tweede orde maximum

In de onderstaande figuren zijn de door bron A en bron B uitgezonden golven getekend bij het eerste orde maximum (linker figuur) en het tweede orde maximum (rechter figuur). In de rechter figuur bijvoorbeeld passen er precies twee golflengtes in het weglengteverschil.



Opmerkingen

1)

In de bovenstaande figuur waarin de intensiteit langs het observatievlak is getekend, staat $\sin(\alpha)$ langs het observatievlak uit. Toch wordt de plaats op het observatievlak (gerekend vanaf punt O) niet door $\sin(\alpha)$ maar door $L \cdot \tan(\alpha)$ gegeven. Hierin is L de afstand tussen lijnstuk AB en het observatievlak. Voor kleine afbuighoeken zijn $\sin(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ echter praktisch gelijk. Verder is L simpelweg weggelaten.

2)

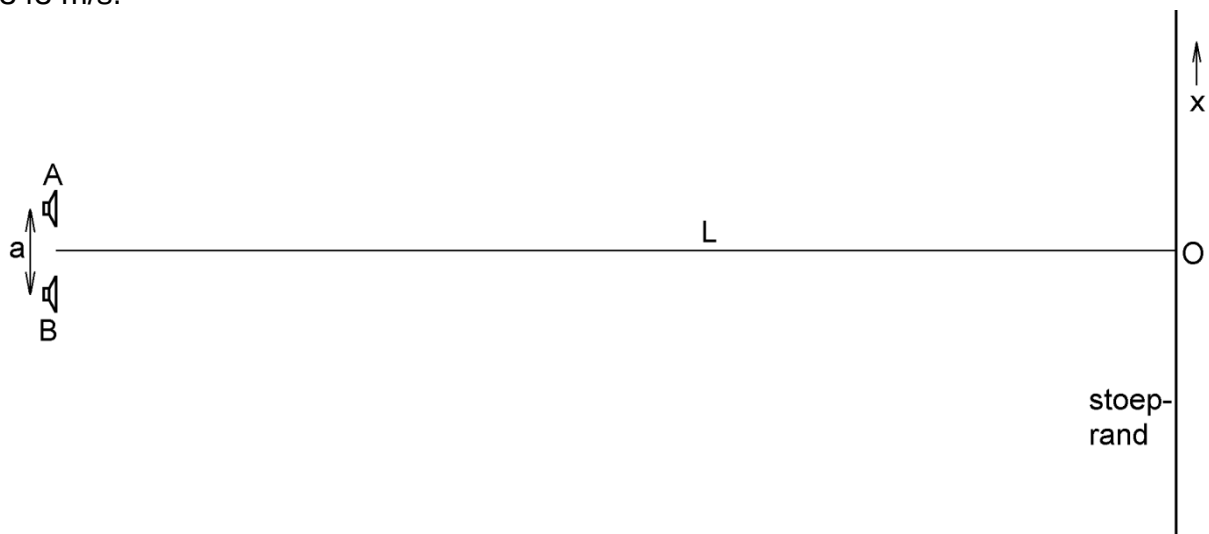
In deze paragraaf gingen we uit van twee puntbronnen. Dezelfde resultaten zijn echter geldig voor twee lijnbronnen. In de voorgaande figuur waarin de opstelling getekend is, lopen deze dan door de puntbronnen (dikke stippen) en staan loodrecht op het papier.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

In de onderstaande figuur staan leerlingen langs een stoepwand opgesteld. Op afstand L van de stoepwand zenden twee identieke luidsprekers A en B geluidsgolven in de richting van de leerlingen uit. Verbindingslijn AB tussen de luidsprekers is evenwijdig aan de stoepwand. De afstand tussen de luidsprekers is met a aangegeven. De luidsprekers zijn in fase aangesloten op dezelfde signaalbron (toongenerator) die een sinusvormig signaal afgeeft. Punt O van de stoepwand heeft dezelfde afstand tot beide luidsprekers.

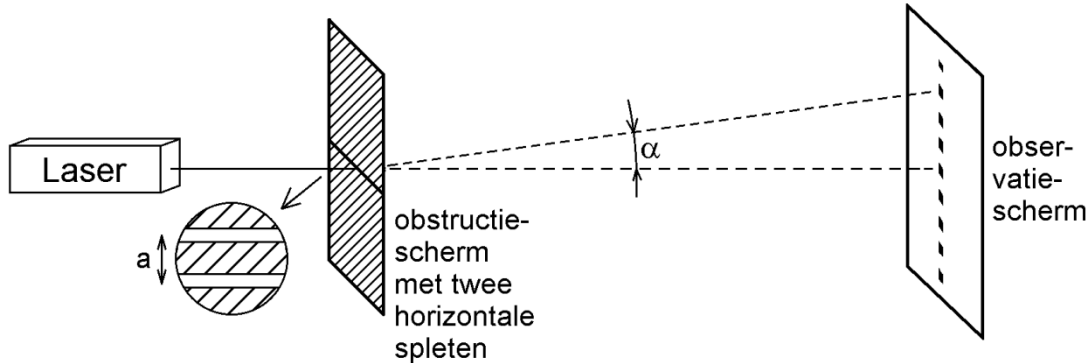
In deze opgave gaan we uit van de volgende afstanden: $a = 40,0$ cm en $L = 11,0$ m. Verder bedraagt de frequentie van de signaalbron 3,00 kHz en is de geluidssnelheid 343 m/s.



- Bereken de golflengte van de geluidsgolven.
- Bereken de afbuighoek (in de voorgaande leestekst met α aangegeven), waarbij het eerste orde interferentiemaximum optreedt.
- Bereken op welke afstand van punt O de leerlingen moeten staan voor het eerste orde maximum.
- Bereken de hoogste orde die een maximum in deze opgave kan hebben. Bedenk daarbij dat de sinus van een hoek nooit groter dan 1 kan zijn.

Opgave 2

In de onderstaande figuur valt een laserstraal op een ondoorzichtig obstructiescherm met twee horizontale spleten. De afstand tussen de middens van de spleten wordt met a aangeduid. Voorbij het obstructiescherm is op een observatiescherm een interferentiepatroon zichtbaar. Dit patroon kun je verklaren door de twee spleten als lijnbronnen op te vatten en de theorie van deze paragraaf toe te passen.



De golflengte van het laserlicht bedraagt 550 nm. De afstand tussen beide schermen bedraagt 2,6 m. Op het observatiescherm is de afstand tussen het nulde orde maximum en derde orde maximum 6,0 cm. De tekening is dus niet op schaal.

a.

Bereken de afbuighoek α van het derde orde maximum.

b.

Bereken de afstand a tussen de twee spleten.

c.

Leg uit of de afstand tussen de maxima op het observatiescherm groter of kleiner wordt als de golflengte van het licht kleiner wordt.

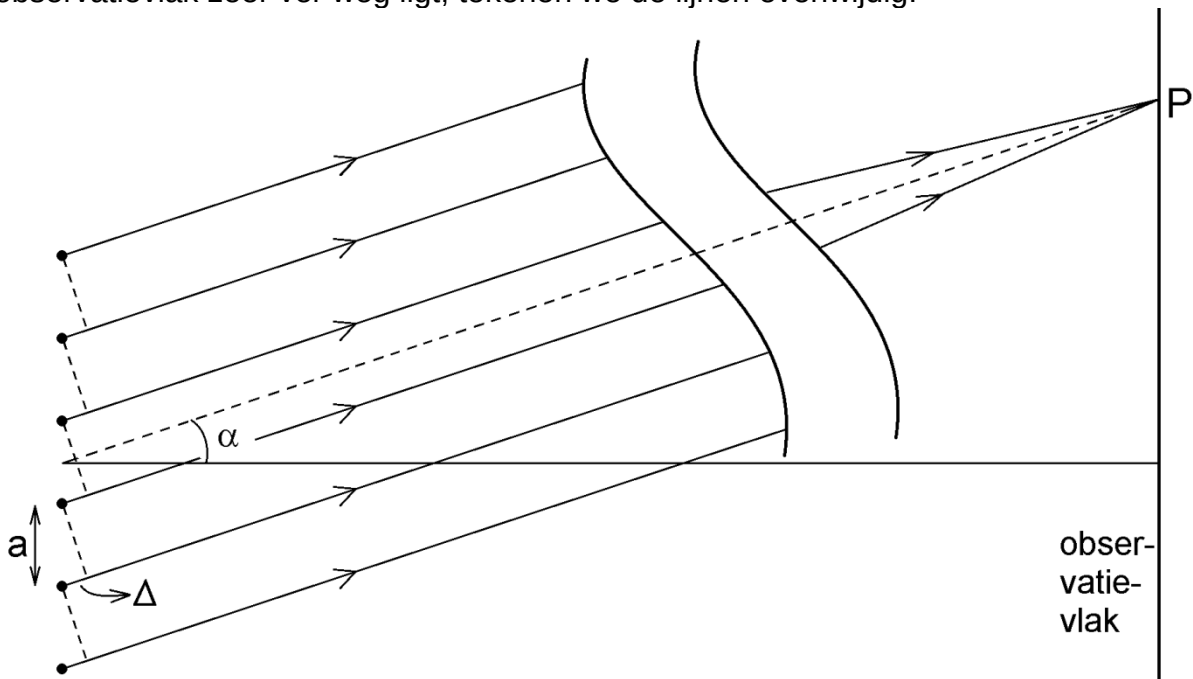
d.

Leg uit of de afstand tussen de maxima op het observatiescherm groter of kleiner wordt als de afstand a tussen de spleten kleiner wordt.

§ 4 Interferentie in het verre veld bij een rij puntbronnen

Effect van een toenemend aantal bronnen

In de vorige paragraaf waren er twee puntbronnen die golven uitzenden. In de huidige paragraaf gaan we het aantal (punt)bronnen uitbreiden. Alle bronnen staan op gelijke afstand a van elkaar en alle bronnen trillen met dezelfde frequentie en amplitude en zijn in fase met elkaar. Zie de onderstaande figuur. De rechte lijnen verbinden de bronnen met één punt P van het observatievlak. Omdat dit observatievlak zeer ver weg ligt, tekenen we de lijnen evenwijdig.

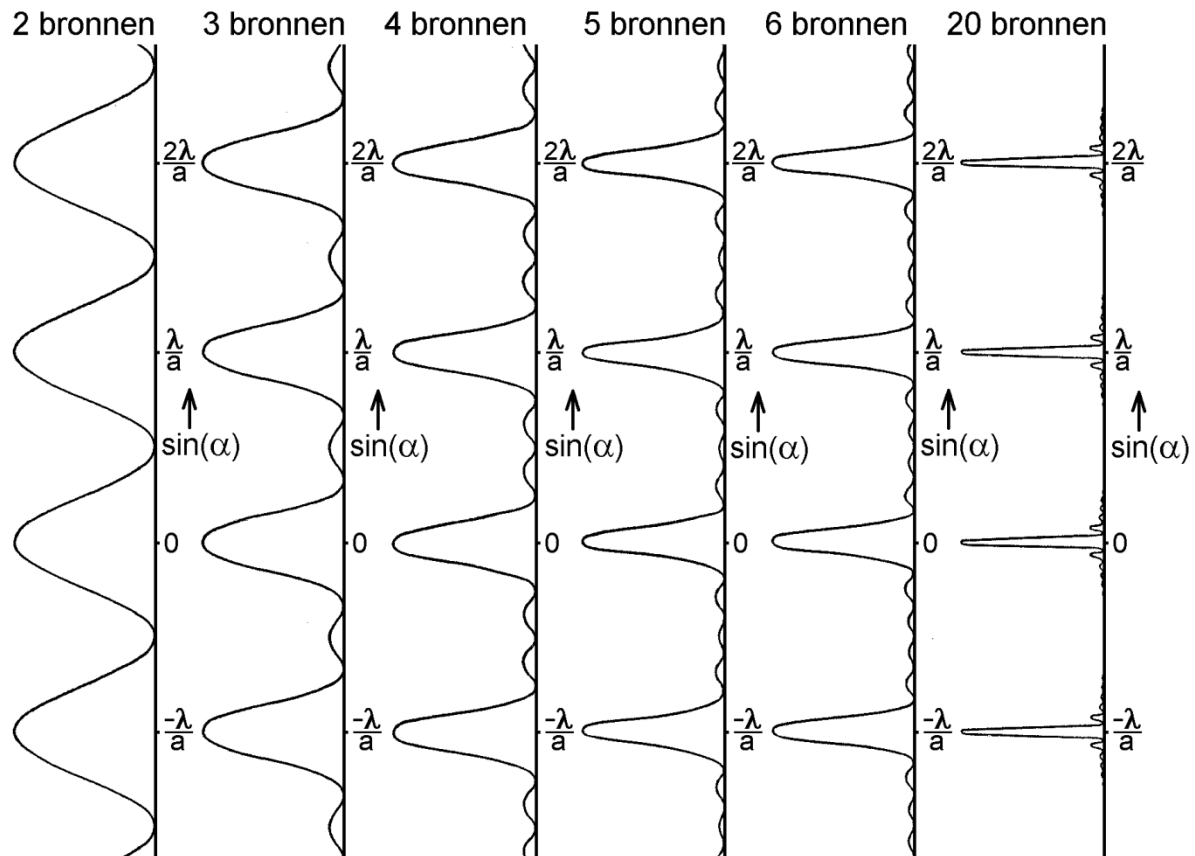


Voor de maxima van de intensiteit geldt dezelfde formule als bij twee puntbronnen namelijk:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}} \quad \text{met } n = \text{geheel getal (.... -2, -1, 0, 1, 2,)}$$

De formule volgt direct uit de figuur, als je bedenkt dat bij een intensiteitspiek voor het weglengteverschil Δ tussen twee aangrenzende golfstralen geldt: $\Delta = n \cdot \lambda$.

In de volgende diagrammen is weergegeven hoe het intensiteitsverloop langs het observatievlak in het verre veld afhangt van het aantal bronnen. In één van de bijlagen wordt dit verband theoretisch afgeleid. De diagrammen horen achtereenvolgens bij 2, 3, 4, 5, 6 en 20 bronnen. Het meest linkse diagram (behorend bij twee bronnen) is gelijk aan het voorgaande diagram.



Bij meer dan twee bronnen zien we dat er tussen de hoofdmaxima een aantal veel kleinere nevenmaxima zit. We laten deze hier verder buiten beschouwing. Als we de hoofdmaxima met elkaar vergelijken, valt op dat ze steeds SMALLER worden bij een toenemend aantal bronnen. Verder worden de pieken (van de hoofdmaxima) steeds hoger bij een toenemend aantal bronnen. Dit laatste is niet in de figuur getekend. Stel dat N het aantal bronnen is. Dan kan bewezen worden dat de hoogte van de pieken evenredig is met het kwadraat van N en de breedte van de pieken omgekeerd evenredig is met N (zie de bijlage voor het bewijs).

Net als hiervoor, bij twee bronnen, geldt dat naarmate de bronnen dichter bij elkaar liggen (afstand a wordt kleiner), de hoofdmaxima op het observatievlak verder uit elkaar liggen.

Opmerking

In deze paragraaf gingen we uit van een rij puntbronnen. Dezelfde resultaten zijn echter geldig voor een rij lijnbronnen. In de bovenstaande figuren waarin de opstelling getekend is, lopen deze dan door de puntbronnen (dikke stippen) en staan loodrecht op het papier.

Opgaven bij § 4

Opgave 1

In deze opgave bevinden zich N gelijke trillingsbronnen op een rij op een vaste onderlinge afstand.

a.

Met welke formule kun je de afbuighoeken berekenen van de hoofdmaxima van het interferentiepatroon in het verre veld?

b.

Hoe blijkt uit de formule dat de afbuighoeken niet afhangen van het aantal bronnen?

c.

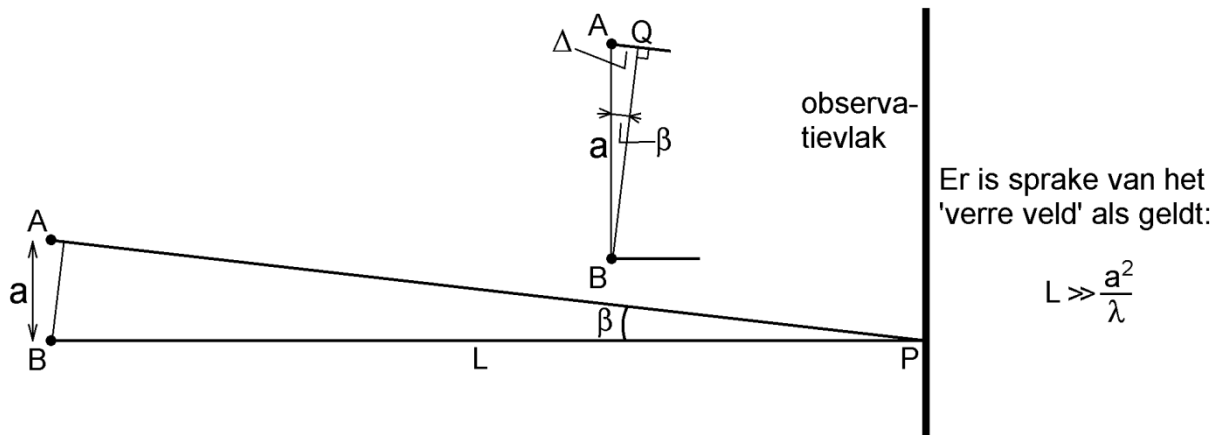
Geef aan wat het effect op het interferentiepatroon in het verre veld is als het aantal bronnen toeneemt.

Opgave 2

Vijf luidsprekers zijn langs een rechte lijn opgesteld op een onderlinge afstand van 1,1 m. Iedere luidspreker brengt een toon voort van 700 Hz. De geluidssnelheid bedraagt 343 m/s. Bereken de afbuighoeken van de eerste en tweede orde maxima in het verre veld.

Opgave 3

In de onderstaande figuur zijn twee trillingsbronnen A en B en een observatievlak getekend. De afstand tussen beide bronnen is met a aangegeven en de afstand tussen de bronnen en het observatievlak met L . In deze opgave tonen we aan dat L veel groter moet zijn dan a^2/λ om over het verre veld te kunnen spreken. Zie ook de formule naast de figuur.



Punt P ligt op het observatievlak en is zodanig gekozen dat lijnstuk BP loodrecht staat op lijnstuk AB. In het ideale geval staat lijnstuk AP dan ook loodrecht op lijnstuk AB en is hoek β gelijk aan nul. In de figuur is β echter ongelijk aan nul. De eis voor het verre veld is nu dat het hierdoor ontstane weglengteverschil Δ van beide bronnen naar P veel kleiner is dan de golflengte λ .

a.

Uit welke getekende driehoek volgt: $\beta \approx \frac{a}{L}$ (met β in radialen)?

b.

Uit welke getekende driehoek volgt: $\beta \approx \frac{\Delta}{a}$ (met β in radialen)?

c.

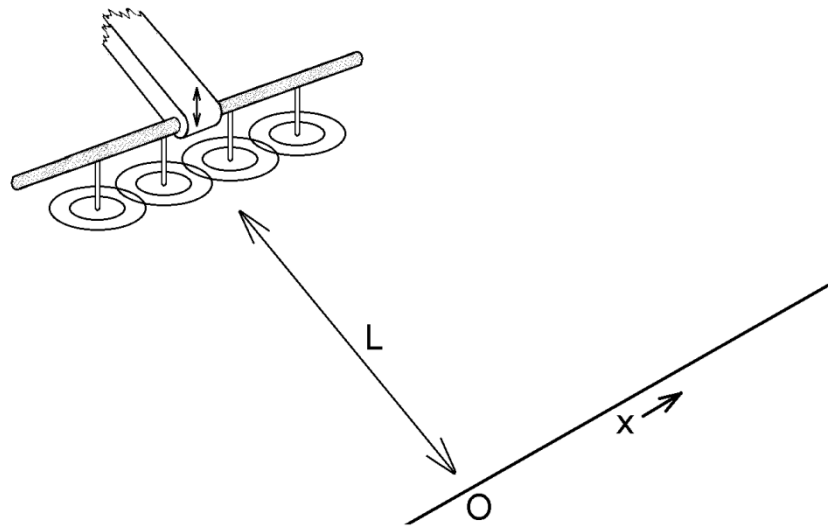
Bewijs nu de formule naast de figuur.

d.

Stel dat je twee coherente lichtbronnetjes hebt op een onderlinge afstand van 1,0 mm die lichtgolven uitzenden met een golflengte van 600 nm. Bereken dan globaal op welke afstand je van het verre veld kunt spreken.

Opgave 4

In de figuur hiernaast zijn vier spijkers op gelijke afstand aan een stokje bevestigd, dat op en neer beweegt. Iedere spijker brengt het wateroppervlak van een grote vijver in trilling. Zodoende worden vier cirkelvormige golven opgewekt die vanaf de spijker naar buiten lopen.



Langs een rechte lijn bij het wateroppervlak wordt de intensiteit van de resulterende watergolf gemeten. Deze lijn is evenwijdig aan het stokje waar de spijkers aan vast zitten. De afstand tussen de spijkers en de lijn is in de figuur met L aangeduid.

a.

Aan welke eis moet afstand L voldoen om de theorie in deze paragraaf te kunnen gebruiken (de eis voor het verre veld dus)? Gebruik hierbij het resultaat van de vorige opgave. Laat a de afstand tussen de afzonderlijke spijkers zijn.

In de rest van deze opgave wordt aangenomen dat de afstand L ruim voldoende is om de theorie in deze paragraaf te kunnen gebruiken.

Op bepaalde plaatsen x langs de lijn is de intensiteit maximaal.

b.

Geef aan welke veranderingen in het intensiteitsverloop langs de lijn optreden als de afstand tussen de spijkers kleiner gemaakt wordt.

c.

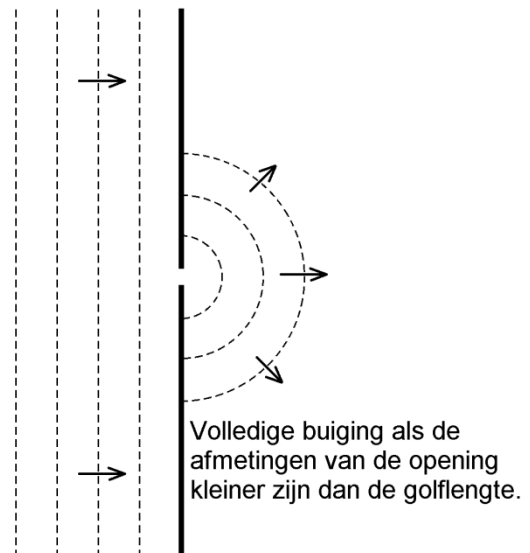
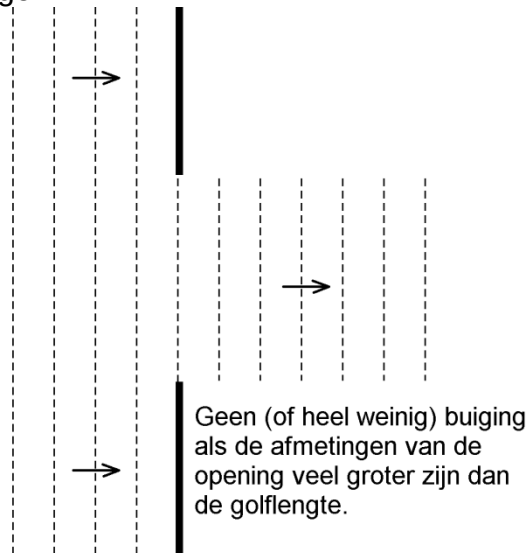
Geef aan welke veranderingen in het intensiteitsverloop langs de lijn optreden als er twee extra spijkers aan het stokje bevestigd worden (met dezelfde onderlinge afstand).

§ 5 Buiging (diffractie) van golven

Buiging van golven door een opening

In de twee onderstaande figuren beweegt een vlakke golf van links naar rechts en valt op een (harde, niet meebewegende) afscheiding of scherm met een opening erin. De golf kan een oppervlaktegolf zijn, zoals langs het wateroppervlak, of een driedimensionale golf zoals bij geluid. De stippellijnen stellen de golfbergen van de golf voor. Het scherm houdt de invallende golven tegen en alleen bij de opening kunnen de golven aan de andere kant van het scherm komen.

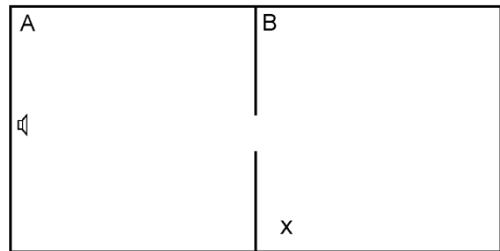
In de linker figuur zijn de afmetingen van de opening groot ten opzichte van de golflengte van de golf. Bij een ronde opening is de diameter bijvoorbeeld minstens vijf keer zo groot als de golflengte. Zoals in de figuur te zien is, loopt de golf dan hoofdzakelijk rechtdoor. Er is in dit geval niet of nauwelijks sprake van buiging van de golf.



In de rechter figuur zijn de afmetingen van de opening klein ten opzichte van de golflengte van de golf. Bijvoorbeeld is bij een ronde opening de diameter kleiner dan de golflengte. Voorbij de opening loopt de golf dan in alle richtingen en zou je van een bolvormige golf kunnen spreken. We spreken dan van volledige buiging. In het overgangsgebied tussen geen buiging (linker figuur) en volledige buiging (rechter figuur) is er wel sprake van buiging; alleen minder sterk dan in de rechter figuur. In één van de volgende paragrafen gaan we hier dieper op in. Overigens wordt vaak het woord 'diffractie' in plaats van buiging gebruikt. Letterlijk betekent 'diffractie' dat de golven uit elkaar breken.

Getallenvoorbeeld met geluid

Twee woonkamers A en B zijn gescheiden door een dikke betonnen muur. Zie de figuur hiernaast. De deur die de kamers met elkaar verbindt, staat open en is 1,0 m breed. Aan de andere kant van kamer A produceert een geluidsbron een zuivere toon met een frequentie f van 200 Hz. De snelheid v van het geluid bedraagt 343 m/s.



De golflengte λ die bij de toon hoort, kan als volgt berekend worden.

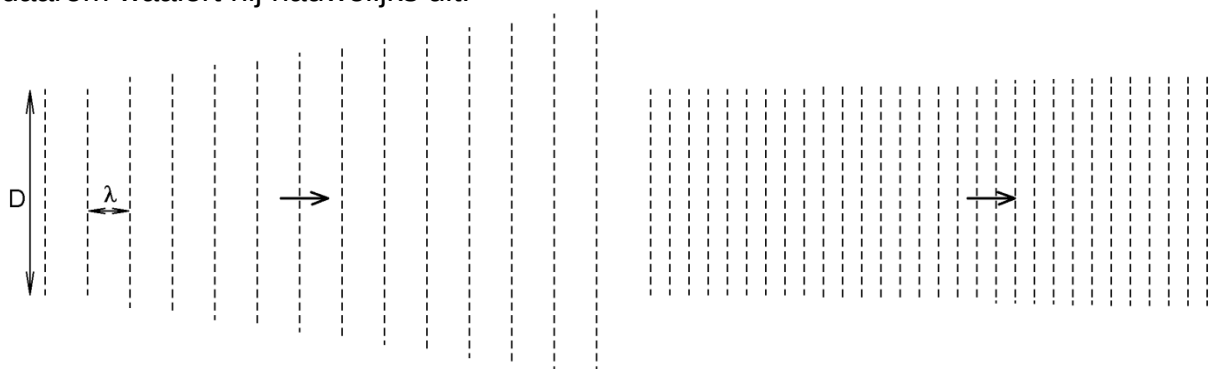
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{200 \text{ Hz}} = 1,7 \text{ m}.$$

Iemand die zich om de hoek in kamer B bevindt (bij het kruisje in de figuur), kan de toon goed horen, omdat de geluidsgolven volledige buiging vertonen. De breedte van de deur is immers kleiner dan de golflengte.

Als de frequentie niet 200 Hz maar 2000 Hz zou bedragen, zou de golflengte tien keer zo klein zijn, namelijk 17 cm. De geluidsgolven zouden dan praktisch niet buigen omdat de afmetingen van de deur in de nieuwe situatie veel groter zijn dan de golflengte. De (hoge) toon zou dus veel moeilijker hoorbaar zijn.

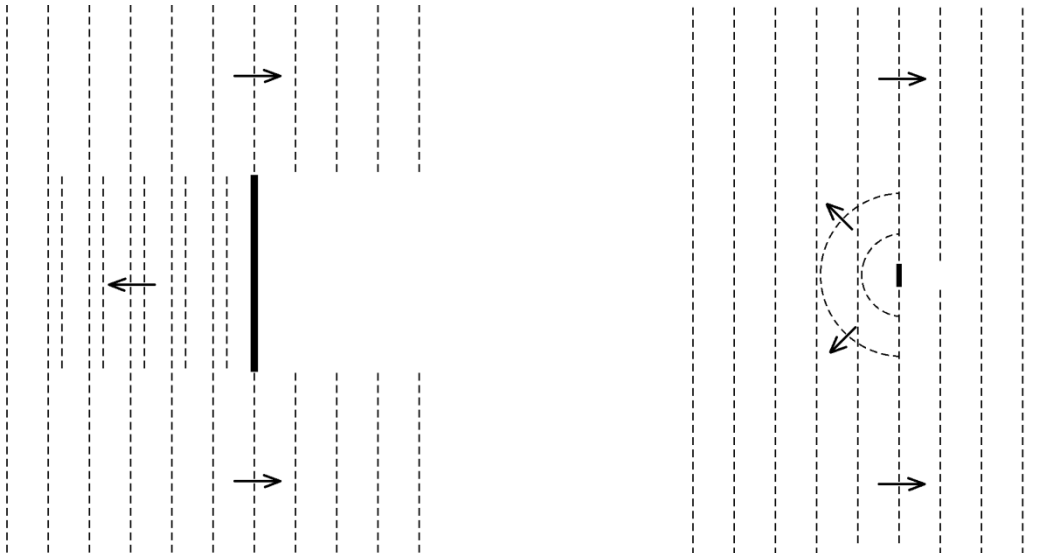
Het breder worden van een golfbundel

Uit het bovenstaande volgt ook dat een golfbundel, zoals een geluidsgolf of een lichtstraal, minder snel breder wordt ('uitwaaiert') naarmate de verhouding van de golflengte λ en de bundelbreedte D kleiner is. Zie de onderstaande figuren waarin de gestippelde lijnen de golfbergen voorstellen. In de rechter figuur is de golflengte veel kleiner dan in de linker figuur en neemt de breedte van de bundel dus langzamer toe. Zo kan een geluidsbundel met een hoge toon (kleine golflengte) gemakkelijker in een bepaalde richting gestraald worden dan een geluidsbundel met een lage toon (grote golflengte). Een laserstraal is een ander voorbeeld. De golflengte van zichtbaar licht is veel en veel kleiner dan de breedte van de lichtbundel (een aantal millimeter) en daarom waaiert hij nauwelijks uit.



Het effect van een obstakel op een golf

In de twee onderstaande figuren beweegt een vlakke golf weer van links naar rechts en komt een obstakel tegen dat de golf tegenhoudt. Het obstakel is als een rechte lijn getekend. In de linker figuur zijn de afmetingen van het obstakel veel groter dan de golflengte van de golf; in de rechter figuur veel kleiner. Merk op dat deze situatie precies het tegenovergestelde is van de situatie met een opening in een scherm.



In de linker figuur vindt er niet of nauwelijks buiging van de golven plaats. Achter het obstakel zou je van een schaduw kunnen spreken. In de rechter figuur buigt de golf om het obstakel heen en gaat daarna bijna onverstoord verder. Bij buiging kijken we voornamelijk naar wat er achter het obstakel gebeurt. We redeneren dus vanuit de golfvoortplanting gezien in voorwaartse richting.

In de bovenstaande figuren is ook de aan het obstakel gereflecteerde golf getekend (in de allereerste figuren trad er ook reflectie op maar die was niet getekend). In de linker figuur fungeert het obstakel als een vlakke spiegel en is de gereflecteerde golf een vlakke golf die naar links beweegt. In de rechter figuur is de door het obstakel teruggezonden golf bolvormig. In de rechter situatie spreken we eigenlijk niet van reflectie, maar van verstrooiing. Bij verstrooiing is de golflengte van de golf groter dan de afmetingen van het obstakel.

Getallenvoorbeeld met geluid

In een ziekenhuis kan een echoscopist een echo maken om een ongeboren baby te bekijken. Hierbij maakt hij gebruik van ultrasone geluidsgolven die in de buik worden gezonden. De teruggekaatste golven worden weer opgevangen en verwerkt tot een plaatje van de buik inclusief baby. De geluidsgolven moeten een golflengte hebben die veel kleiner is dan de af te beelden lichaamsdelen. Dat blijkt onder andere uit de bovenstaande figuren. In de linker figuur kunnen bijvoorbeeld de afmetingen van het obstakel uit de gereflecteerde golf worden bepaald; in de rechter figuur kan dat beslist niet uit de verstrooide golf.

Stel dat je obstakels (gezien vanuit het perspectief van het geluid) van 1 mm nog wilt kunnen waarnemen. Een golflengte van bijvoorbeeld 0,1 mm zou dan geschikt zijn. Bij een geluidssnelheid van ongeveer 1500 m/s (dit is de geluidssnelheid van water; het menselijk lichaam bevat veel water) komen we dan op de volgende minimale frequentie.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1500 \text{ m/s}}{0,1 \text{ mm}} = 15 \text{ MHz} .$$

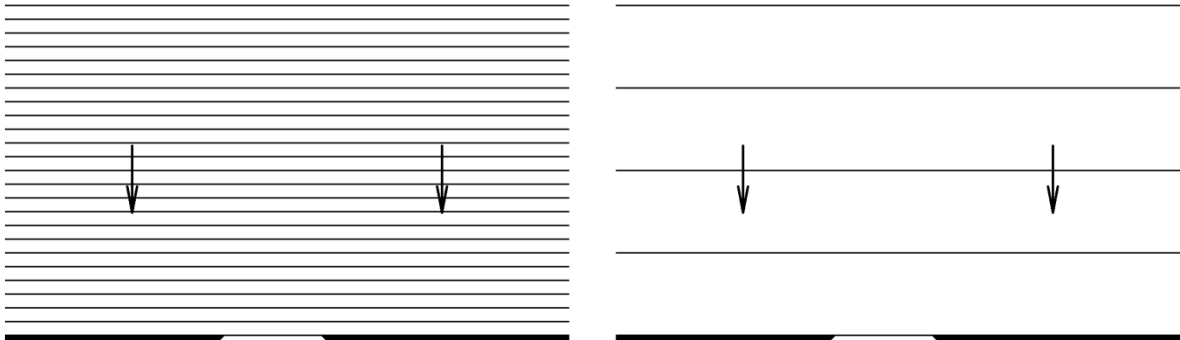
Vooruitblik

Om het verschijnsel 'buiging' te begrijpen en te analyseren, moeten we eerst kennis maken met het principe van Huygens. Dit gebeurt in de volgende paragraaf.

Opgaven bij § 5

Opgave 1

In de onderstaande figuren is twee maal dezelfde plaat (barrière) met een opening afgebeeld. In de linker figuur valt een vlakke golf met een korte golflengte op de plaat en in de rechter figuur een vlakke golf met een lange golflengte. Van de golven zijn de golfbergen weergegeven. Teken de golfbergen aan de andere kant van de opening.



Opgave 2

Jaap, Roel en Annie zitten naast elkaar op een brede bank. Op een paar meter voor hen staat Johan met een luidspreker in zijn handen. De luidspreker is aangesloten op een toongenerator. Eerst stelt Johan de toongenerator in op een lage toon (150 Hz) en daarna op een hoge toon (5,0 kHz). In beide gevallen richt hij de luidspreker afwisselend op Jaap, Roel en Annie. Bij lage tonen merken ze weinig verschil; bij hoge tonen juist wel. Verklaar dit verschil.

Opgave 3

Geluidsgolven met een frequentie van 250 Hz kunnen bij een deur gemakkelijk buiging vertonen. Toon dat aan. Ga hierbij uit van een geluidssnelheid van 343 m/s en een deuropening met een breedte van 1,0 m.

Opgave 4

Een laserstraal heeft een diameter van 3 mm en een golflengte van 0,53 μm . Bereken hoeveel keer de diameter groter is dan de golflengte. Leg daarmee uit dat een laserbundel nauwelijks breder wordt in de voortplantingsrichting.

Opgave 5

Een vleermuis zendt tijdens zijn vlucht geluidsgolven uit met frequenties tussen 50 kHz en 100 kHz. De door prooidieren teruggekaatste golven vangt hij op en hij bepaalt zo de locatie van deze dieren. Leg uit waarom de uitgezonden frequenties zo hoog moeten zijn.

Opgave 6

Met een lichtmicroscop kan men objecten, kleiner dan de golflengte van het licht, niet scherp waarnemen. Met een elektronenbundel is dat wel mogelijk, want snelle elektronen gedragen zich als golven met een zeer kleine golflengte. Hiervoor geldt:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

Hierin is h de constante van Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$), m de massa van het elektron ($m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) en v de snelheid van het elektron.

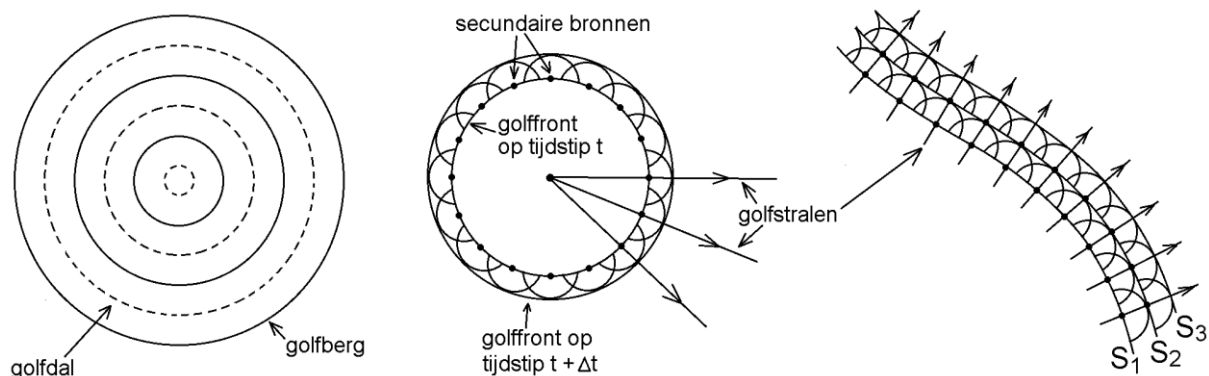
Bereken hoeveel keer de golflengte van zichtbaar licht (neem bijvoorbeeld 500 nm) groter is dan de golflengte van elektronen met een snelheid van $4,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

§ 6 Principe van Huygens

Principe van Huygens

Als er een waterdruppel in een sloot valt, veroorzaakt dit een golf op het wateroppervlak die cirkelvormig naar buiten beweegt. De onderstaande linker figuur stelt een momentopname van het bovenaanzicht van het wateroppervlak voor. De doorgetrokken cirkels stellen de golfbergen voor en de onderbroken cirkels de golfdalen. In deze paragraaf wordt veelvuldig van het begrip golffront gebruik gemaakt. Onder een golffront verstaan we de verzameling punten die op hetzelfde tijdstip in trilling zijn gekomen doordat de kop (voorkant) van de golf op dat moment die punten bereikte. Er zijn oneindig veel golffronten aan te wijzen; elk golffront vormde op een eerder moment de kop van de golf. In ons voorbeeld zijn alle golffronten cirkelvormig. Kenmerkend voor een golffront is dat alle punten op dat golffront in fase trillen.

Christiaan Huygens (1629 – 1695) maakte zich een voorstelling van de uitbreiding van het golffront voor latere tijdstippen. Zijn idee was, dat elk punt van het golffront optreedt als een trillingsbron, een zogenoemde secundaire bron. Elke secundaire bron gaat in voorwaartse richting halfbolvormige golven uitzenden. Deze zogenoemde secundaire golven bereiken na korte tijd Δt nieuwe plaatsen en de omhullende van de secundaire golffronten vormt het nieuwe golffront. Dit is in de middelste figuur weergegeven. In de middelste figuur zijn ook drie golfstralen aangegeven. Dit zijn lijnen die LOODRECHT op de golffronten staan en de richting aangeven, waarin de golf zich voortplant. In het voorbeeld van de watergolf wijzen de golfstralen naar buiten.

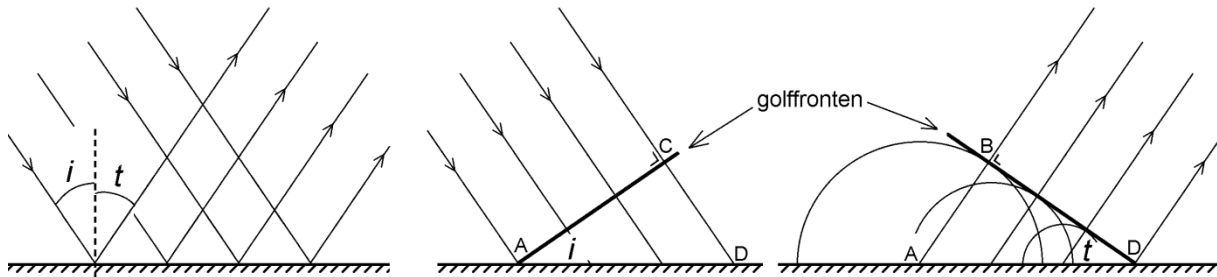


In de rechter figuur is getekend hoe een willekeurig golffront S_1 zich volgens het principe van Huygens uitbreidt. De punten van S_1 zenden secundaire golven uit. De omhullende van deze secundaire golven vormt het nieuwe golffront S_2 . De punten van S_2 zenden op hun beurt ook secundaire golven uit. De omhullende hiervan vormt golffront S_3 . Enzovoort. In de rechter figuur zijn ook een groot aantal golfstralen getekend. Het principe van Huygens is niet alleen toepasbaar op oppervlaktegolven maar ook op driedimensionale golven, zoals licht- en geluidsgolven.

Na Huygens hebben de Fransman Fresnel en de Duitser Kirchhoff het idee van secundaire bronnen wiskundig beschreven. Uit hun analyse volgt dat secundaire bronnen hun golven vooral naar voren uitzenden en in mindere mate naar opzij. Recht naar achteren wordt niks uitgezonden.

Reflectie van golven

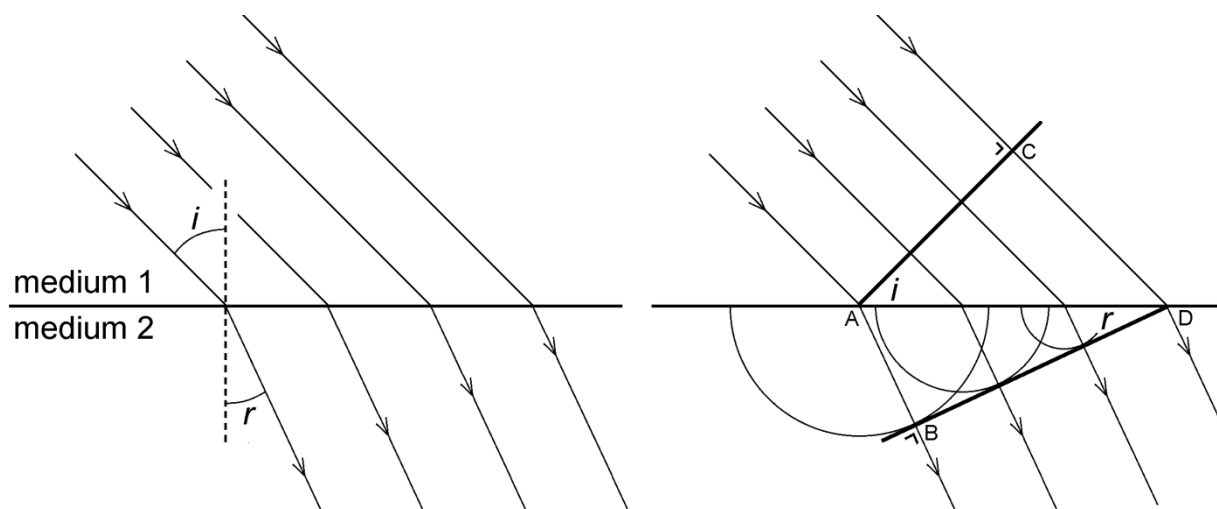
In de onderstaande figuren valt een vlakke golf op een vlakke spiegel. In de linker figuur zijn vier invallende stralen en de bijbehorende teruggekaatste stralen getekend. Volgens de spiegelwet is de hoek van inval (i) gelijk aan de hoek van terugkaatsing (t). Ten overvloede: de hoek van inval is de hoek tussen de invallende straal en de normaal (deze is vaak gestippeld). De hoek van terugkaatsing is de hoek tussen de teruggekaatste straal en de normaal.



De middelste en rechter figuur laten zien, dat de spiegelwet uit het principe van Huygens volgt. In de middelste figuur zijn de vier invallende stralen en één golffront getekend. In de rechter figuur zijn de vier teruggekaatste stralen en ook één golffront getekend. In de tijd dat punt C een (secundaire) bolgolf met straal CD heeft opgewekt (zie middelste figuur), heeft punt A een (secundaire) bolgolf met straal AB opgewekt (zie rechter figuur). Omdat $CD = AB$, volgt hieruit dat hoek i in driehoek ADC gelijk is aan hoek t in driehoek ADB.

Breking van golven

In de onderstaande figuren passeert een vlakke golf een plat scheidingsvlak tussen twee media 1 en 2. In de linker figuur zijn vier golfstralen getekend; rechts zijn ook twee golffronten getekend. Zoals goed te zien is, veranderen de stralen en fronten bij de overgang van de twee media van richting. In de linker figuur blijkt dit duidelijk uit het feit dat de hoek van inval i en de hoek van breking r (de r van refractie) van elkaar verschillen.



Bij de overgang van het ene naar het andere medium speelt de zogenoemde brekingsindex een grote rol. Hiervoor geldt:
De brekingsindex n geeft aan hoeveel keer de golfsnelheid in medium 1 groter is dan in medium 2.

Het verband tussen de hoek van inval (i) en de hoek van breking (r) wordt gegeven door de wet van Snellius. Deze luidt als volgt:

$$\frac{\sin(i)}{\sin(r)} = n$$

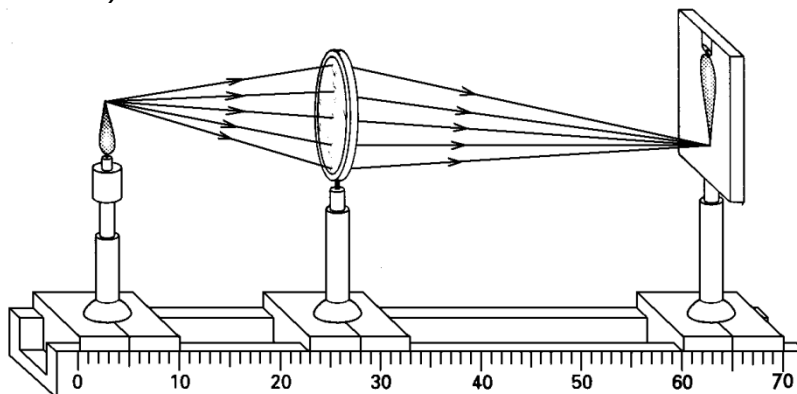
De rechter figuur laat zien dat de wet van Snellius uit het principe van Huygens volgt. In de tijd dat punt C een (secundaire) bolgolf met straal CD heeft opgewekt, heeft punt A een (secundaire) bolgolf met straal AB opgewekt. Omdat $CD = n$ keer AB , volgt hieruit dat $\sin(i) = n \cdot \sin(r)$. Beschouw daartoe de driehoeken ADC en ADB.

Opmerking

Hierboven is de brekingsindex gekoppeld aan de overgang tussen twee willekeurige stoffen 1 en 2. Vaak wordt bij breking van licht de brekingsindex echter gekoppeld aan afzonderlijke (doorzichtige) stoffen. De brekingsindex is dan gedefinieerd als het aantal keer dat de lichtsnelheid in vacuüm groter is dan de lichtsnelheid in de betreffende stof. Zo is de brekingsindex van water ongeveer 1,3 en van diamant 2,4. Altijd is de brekingsindex van een stof groter dan 1. De brekingsindex van lucht is praktisch gelijk aan 1.

Gloftica en geometrische optica

In de gloftica wordt licht beschreven als golfverschijnsel. Hiermee kunnen onder andere interferentie en buiging verklaard worden. In de gloftica wordt zowel gebruik gemaakt van golffronten als golfstralen. Zoals hiervoor is besproken, staan deze twee steeds loodrecht op elkaar. In de geometrische optica houdt men geen rekening met buiging van lichtgolven. Men neemt aan dat licht in een homogeen medium rechtdoor gaat en men werkt alleen met (rechte) golfstralen (lichtstralen). Zie bijvoorbeeld de onderstaande figuur. De geometrische optica is toepasbaar bij alledaagse voorwerpen en optische componenten (spiegel, lens) want deze hebben afmetingen die vele malen groter zijn dan de golflengte van licht (tussen 400 nm en 750 nm).



Opgaven bij § 6

Opgave 1

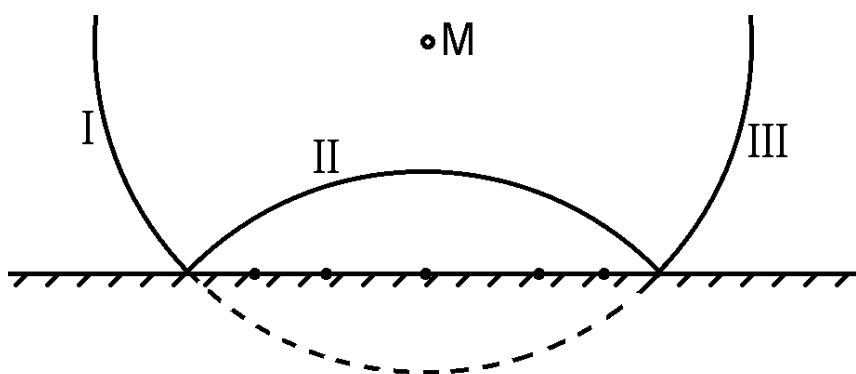
Wat verstaan we onder een golffront?

Wat is het verband tussen een golffront en een golfstraal?

Opgave 2

In de figuur hiernaast valt een waterdruppel op plaats M in een grote bak met water. De ontstane golf breidt zich naar buiten toe uit. De golf wordt aan één kant weerkaatst tegen de wand van de bak. Het getekende golffront bestaat uit de drie

delen I, II en III. Tijdens de weerkaatsing zenden secundaire bronnen langs de wand golven uit die met z'n allen resulteren in golffront II. In de figuur zijn vijf van deze secundaire bronnen als dikke stippen aangegeven. Teken de golffronten van de bijbehorende secundaire golven.

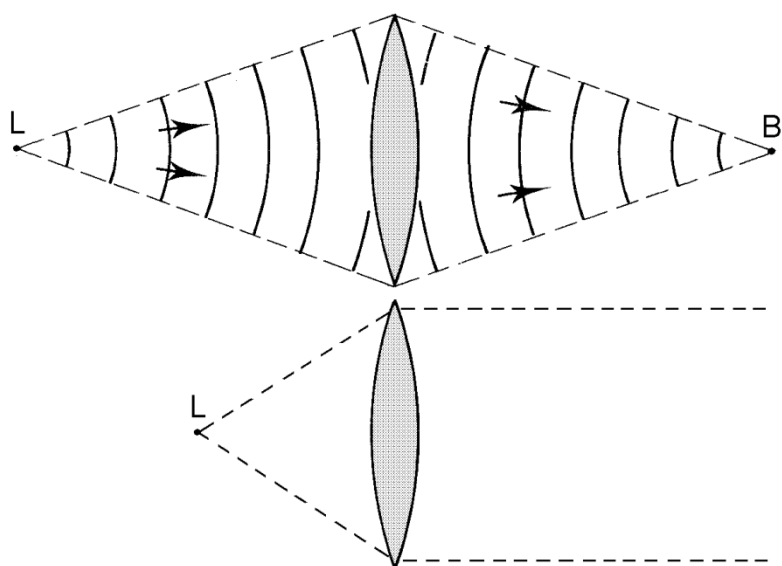


Opgave 3

In de bovenste figuur hiernaast is een lichtgevend punt L voor een bolle lens geplaatst. Alle door de lens gebroken lichtstralen komen in punt B samen. In de figuur zijn een aantal golffronten getekend.

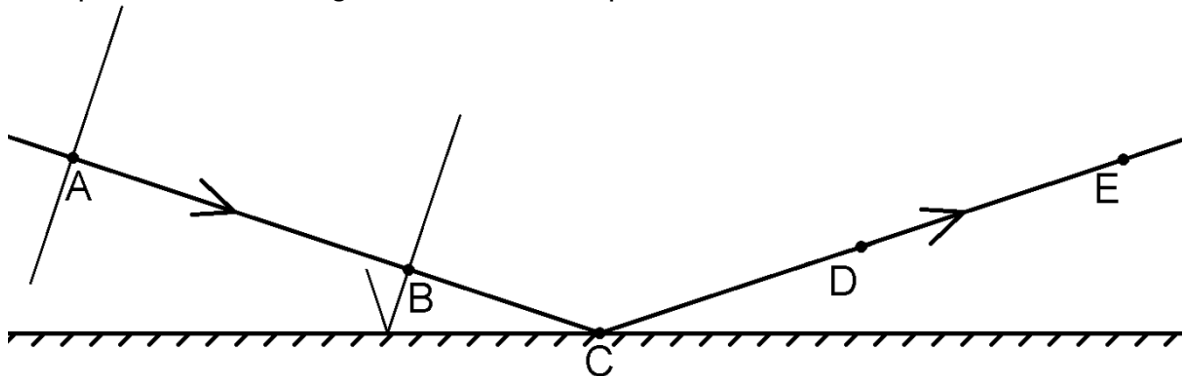
In de onderste figuur staat het lichtpunt L in het brandpunt van de lens. De gebroken lichtstralen zijn evenwijdig.

De opdracht is om een aantal golffronten te tekenen.



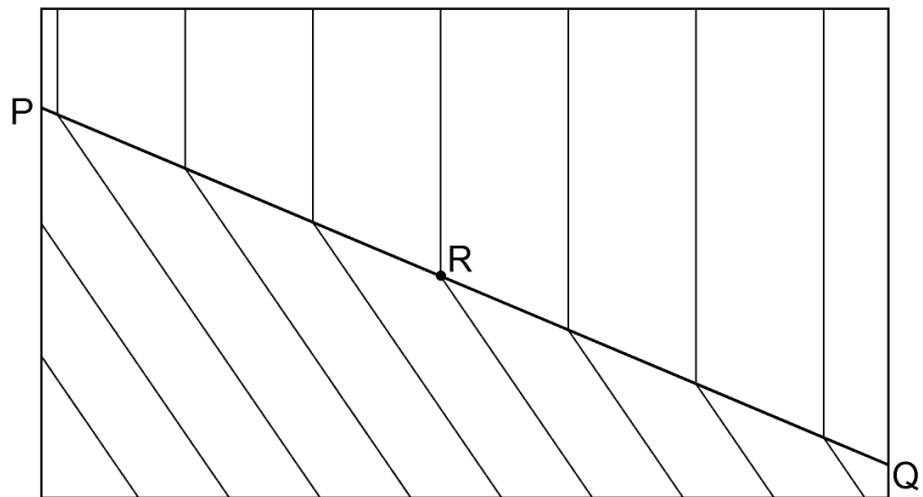
Opgave 4

In de onderstaande figuur is een lichtstraal getekend die weerkaatst tegen een spiegel. Twee golffronten zijn getekend; de ene loopt door punt A en de andere loopt door punt B. Teken de golffronten door de punten C, D en E.



Opgave 5

In de rechthoek hiernaast stelt lijnstuk PQ het scheidingsvlak tussen twee doorzichtige stoffen voor. De op regelmatige afstanden van elkaar getekende lijnen stellen golffronten voor van licht dat van de bovenste stof naar de onderste stof gaat.

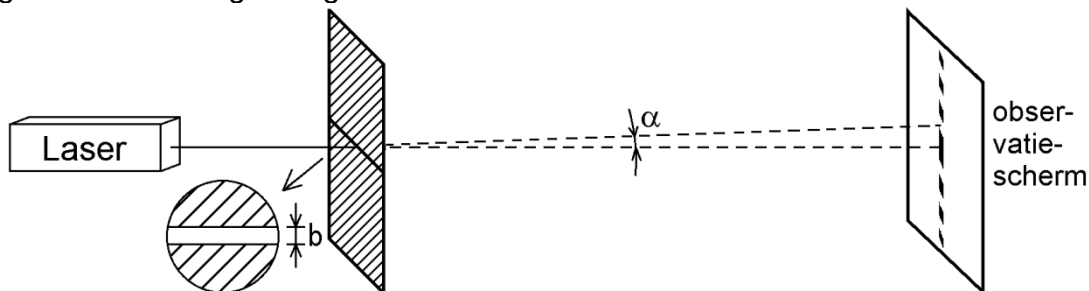


- Teken de LICHTSTRAAL die door punt R gaat. Geef ook de richting van de lichtstraal aan.
- Geef in de figuur bij punt R de hoek van inval i en de hoek van breking r aan. Meet deze hoeken vervolgens op.
- Bereken met $n = \frac{\sin(i)}{\sin(r)}$ hoe groot de brekingsindex n is.
- Bepaal de brekingsindex door afstanden tussen de golffronten te bepalen.

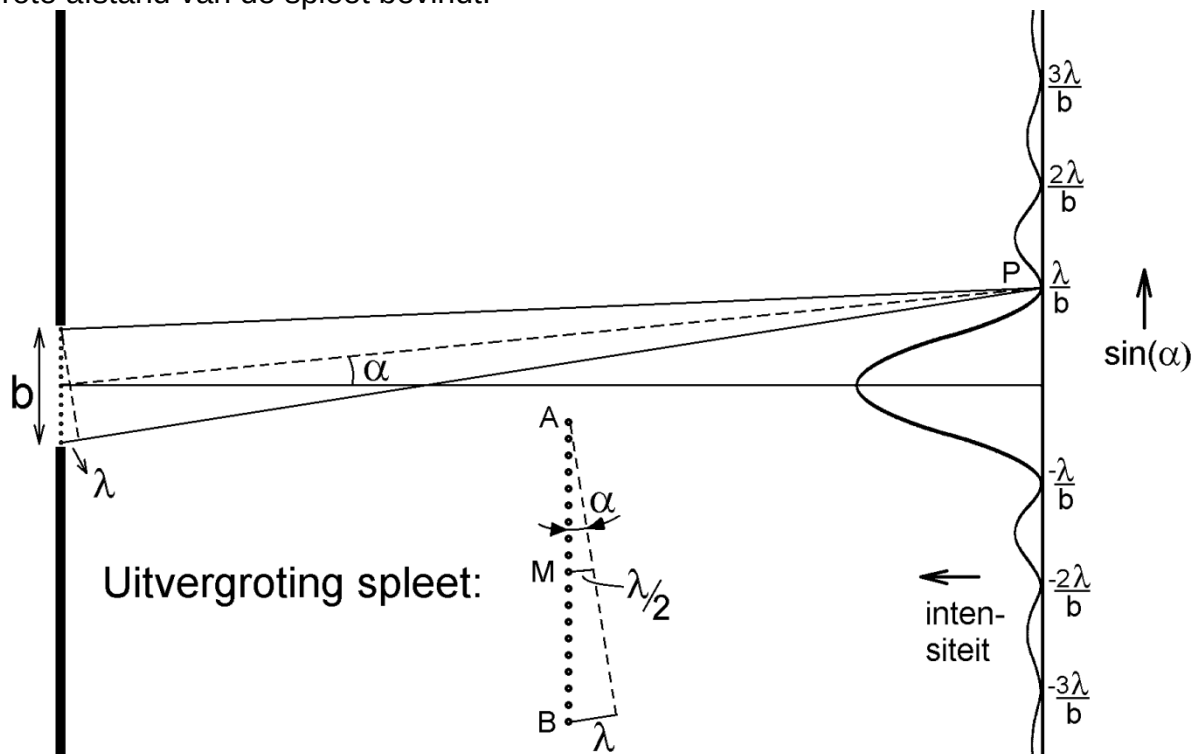
§ 7 Buiging van een golf door een spleet

Buiging van licht bij een spleet

In de onderstaande figuur valt een laserstraal op een smalle horizontale spleet met breedte b in een afschermende plaat. Let op: in de figuur zou je misschien liever van spleethoogte willen spreken maar hier wordt consequent het woord spleetbreedte gebruikt. De spleetbreedte (b dus) is veel kleiner dan de diameter van de lichtbundel uit de laser. Omdat de spleetbreedte dezelfde grootteorde heeft als de golflengte λ van het licht, vertoont het licht in verticale richting buiging. Dit is herkenbaar aan het verticale streepjespatroon op het observatiescherm. In horizontale richting buigt het licht niet (of niet merkbaar), omdat de horizontale lengte van de spleet vele malen groter is dan de golflengte van het licht.



In de volgende analyse gaan we na bij welke verticale afbuighoeken α er lichtminima op het observatiescherm zijn. Overeenkomstig het principe van Huygens vatten we het licht in de spleet op als een zeer groot aantal secundaire bronnen. In de onderstaande tekening zijn deze bronnen als stippen weergegeven. Bij de uitvergroting van de spleet in de figuur zijn de boven- en onderkant van de spleet met A en B aangegeven en het midden van de spleet met M. De secundaire bronnen in de spleet zenden golven uit die op het observatiescherm terecht komen, dat zich op grote afstand van de spleet bevindt.



Langs het observatiescherm is de lichtintensiteit als functie van $\sin(\alpha)$ weergegeven. Het theoretisch verband hiertussen is in de bijlage afgeleid. Het eerste minimum op het scherm boven het hoofdmaximum is met P aangeduid. We maken nu gebruik van onze kennis van interferentie om de buiging te begrijpen en eraan te rekenen.

In de figuur zijn vanuit A en B lijnen naar P getrokken. Dit zijn de golfstralen van de secundaire bronnen bij A en B. Als hun lengteverschil precies één golflengte is, doven de lichtgolven van alle secundaire bronnen in de spleet elkaar bij P uit. Dit kun je als volgt begrijpen. De afstand van A tot P en van M tot P verschilt een halve golflengte. De bijbehorende twee secundaire bronnen doven elkaars werking bij P dus uit. De secundaire bron direct onder de bovenste secundaire bron (bij A) dooft de secundaire bron direct onder de middelste secundaire bron (bij M) ook uit. Op deze manier kun je steeds paren van secundaire bronnen vinden die elkaars werking bij P uitdoven. Voor het eerste minimum geldt dan (zie weer de uitvergroting van de spleet):

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{b}.$$

Hierbij is wel aangenomen dat de spleetbreedte zeer veel kleiner is dan de afstand tussen de spleet en het scherm, zodat de lijnen AP en BP als evenwijdig opgevat kunnen worden. Dit wordt de verre veldbenadering genoemd. In de praktijk wordt hier meestal aan voldaan.

Bij het tweede minimum is het weglengteverschil tussen AP en BP gelijk aan twee golflengtes. Je kunt de secundaire bronnen in de spleet dan verdelen in vier groepen waarvan de twee bovenste groepen elkaar uitdoven en de twee onderste groepen ook. Algemeen geldt voor een lichtminimum:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{b}} \text{ met } n = \text{geheel getal behalve } 0$$

We noemen n de orde van het minimum. Zo kun je bijvoorbeeld spreken over het eerste orde en het tweede orde minimum. Merk op dat bij $n = 0$ geen minimum maar juist een maximum optreedt.

Opmerkingen

1)

In deze paragraaf is buiging behandeld aan de hand van licht. Buiging treedt echter op bij alle golfsoorten (geluidsgolven, watergolven enzovoort).

2)

We zien uit de laatste figuur dat verreweg het meeste licht op het scherm valt tussen de twee eerste orde minima. Anders gezegd: de lichtenergie van de 'zijlobben' is gering ten opzichte van de lichtenergie van de 'hoofdlob'. De hoofdlob is twee keer zo breed als de zijlobben.

3)

Uit de formule $\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{b}$ volgt dat bij afnemende spleetbreedte b, de minima op

het scherm steeds verder uit elkaar komen te liggen. Als de spleetbreedte kleiner wordt dan de golflengte, kunnen we zelfs geen hoek α met een intensiteitsminimum vinden. We spreken dan van volledige buiging. Dit is in overeenstemming met paragraaf 5.

Getallenvoorbeeld

Een laserpen zendt licht uit met een golflengte van $0,532 \mu\text{m}$. Dat licht valt op een spleet met een breedte van $1,00 \mu\text{m}$. Het diffractiepatroon is zichtbaar op een scherm dat $30,0 \text{ cm}$ van de spleet verwijderd is. De afstand tussen de twee eerste orde minima kan als volgt berekend worden.

Voor hoek α , behorend bij het eerste orde minimum, geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{b} = \frac{0,532 \mu\text{m}}{1,00 \mu\text{m}} = 0,532$$

Hieruit volgt $\alpha = 32,14^\circ$.

We duiden de afstand tussen de spleet en het scherm met L aan en de afstand tussen het centrale maximum en het eerste orde minimum op het scherm met d . Het verband hiertussen is:

$$\tan(\alpha) = \frac{d}{L}$$

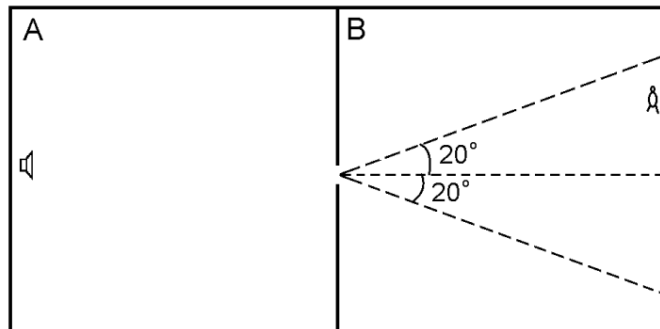
Er geldt dan:

$$d = L \cdot \tan(\alpha) = 0,300 \cdot \tan(32,14^\circ) = 0,1885 \text{ m}$$

De gevraagde afstand ($= 2d$) is dan $0,377 \text{ m}$.

Buiging van geluidsgolven

Tot nu toe ging de paragraaf over lichtgolven. Echter, de bovenstaande theorie geldt ook voor andere soorten golven, bijvoorbeeld geluidsgolven. Neem het volgende geïdealiseerde voorbeeld (zie de figuur). Twee grote fabriekshallen A en B zijn gescheiden door een muur. In de muur zit een spleet (deur) met een



breedte van $1,0 \text{ m}$. Een geluidsbron in een hal A produceert een toon met een frequentie van 1000 Hz . De geluidssnelheid bedraagt 343 m/s . Iemand loopt langs de achterwand van hal B en hoort vooral geluid tussen de afbuighoeken van min 20° en plus 20° (gezien vanuit de spleet). Dit volgt uit de volgende berekening.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{1000 \text{ Hz}} = 0,343 \text{ m}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{b} = \frac{0,343 \text{ m}}{1,0 \text{ m}} = 0,343$$

Hieruit volgt $\alpha = 20^\circ$.

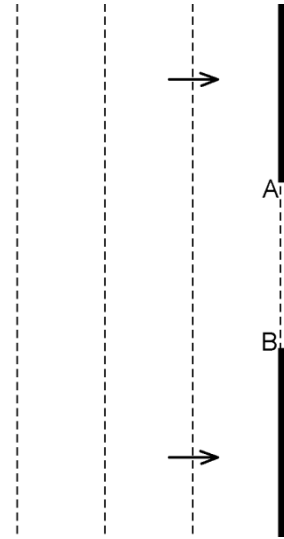
Opgaven bij § 7

Opgave 1

In de figuur hiernaast valt een vlakke geluidsgolf op een deuropening die 1,0 m breed is. De frequentie van het geluid is 650 Hz en de geluidssnelheid bedraagt 343 m/s.

a.

Bereken bij welke afbuighoeken het eerste minimum in het verre geluidsveld hoort.



Als de frequentie van het geluid kleiner wordt, wordt de golflengte groter en zal er bij de deuropening meer buiging optreden.

b.

Bereken bij welke frequentie voor het eerst volledige buiging optreedt.

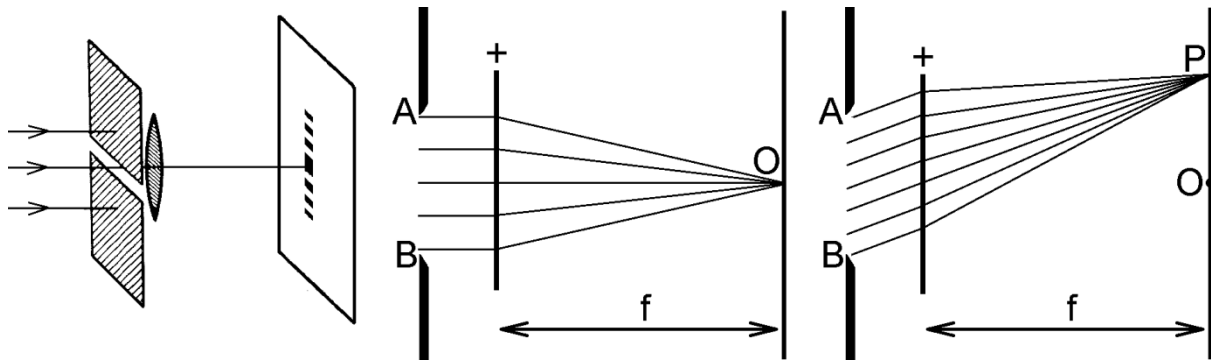
De frequentie van het geluid wordt weer verhoogd. Een waarnemer bevindt zich rechts van de deuropening. Hij ontvangt golven die door de secundaire bronnen in de deuropening worden uitgezonden. We beperken ons in de volgende vraag tot de situatie waarin de waarnemer zich op grote afstand van de deuropening bevindt (hij zit in het 'verre veld') en er daar geen geluid is (hij zit in een geluidsminimum).

c.

Leg uit dat de golven, afkomstig van de secundaire bronnen bij de uiteinden A en B van de deuropening, in fase aankomen bij de waarnemer. Lees eventueel de leestekst van deze paragraaf nog even door.

Opgave 2

In de onderstaande linker figuur valt een laserstraal op een horizontale smalle spleet. Achter de spleet bevindt zich een bolle lens. In het brandvlak van de lens bevindt zich een observatiescherm waarop een diffractiepatroon zichtbaar is. In de middelste figuur is de stralengang naar het hoofdmaximum O weergegeven. In de rechter figuur is de stralengang naar een willekeurig punt P op het scherm weergegeven. Van de spleet is de bovenkant met A en de onderkant met B aangeduid.



a.

Teken in de middelste figuur het door punt A gaande golffront dat bij de getekende lichtstralen hoort. Teken in de rechter figuur het door punt A gaande golffront dat bij de getekende lichtstralen hoort.

b.

Leg uit dat het observatiescherm zich dankzij de bolle lens in het 'verre veld' van de spleet bevindt.

De brandpuntsafstand f van de lens bedraagt 20 cm. De spleetbreedte AB bedraagt $6,0 \mu\text{m}$. Stel dat P het tweede orde diffractieminiemum is en dat de afstand OP gelijk aan 4,0 cm.

c.

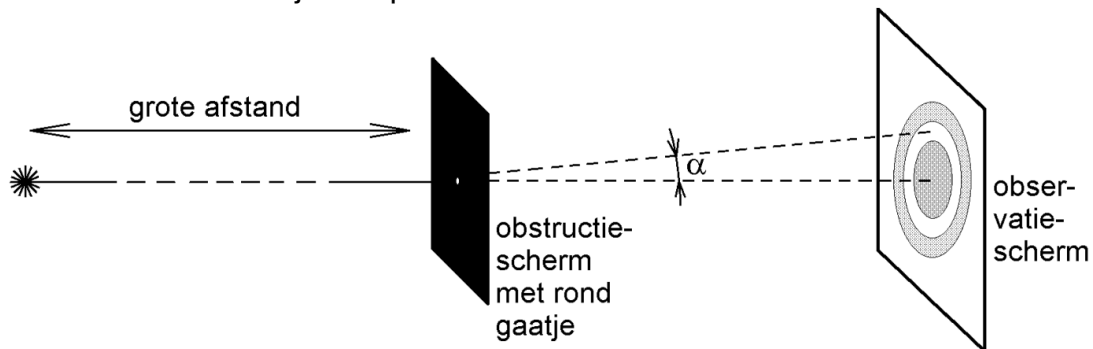
Bereken dan de golflengte van het licht.

Opgave 3

Net als bij een smalle spleet, buigen golven ook bij een opening. Zie bijvoorbeeld de onderstaande figuur. Monochromatisch licht (dus van één kleur), afkomstig van een lichtbron, valt op de cirkelvormige opening van een obstructiescherm. De lichtbron staat op voldoende grote afstand van het obstructiescherm, zodat de golffronten bij het gaatje als vlak kunnen worden beschouwd. Op het observatiescherm, dat op zijn beurt op grote afstand van het obstructiescherm staat, is een buigingspatroon zichtbaar in de vorm van een heldere centrale schijf en daaromheen meerdere ringen (in de figuur is er maar één ring getekend). Afgeleid kan worden dat voor de hoek α tussen het midden van de heldere schijf en het eerste minimum geldt (met λ = golflengte en D = diameter van de opening):

$$\sin(\alpha) = \frac{1,22 \cdot \lambda}{D}.$$

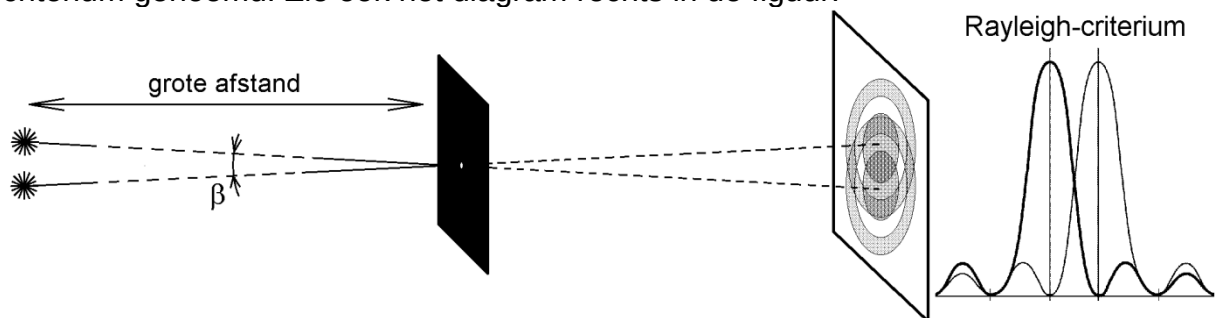
Merk op dat deze formule alleen een factor 1,22 verschilt van de formule in de leestekst die hoort bij een spleet.



a.

Bereken hoek α , als de diameter van de opening 0,10 mm is en de golflengte 500 nm bedraagt.

Als er meerdere lichtbronnen zijn, ontstaat er een combinatie van twee diffractiepatronen op het observatievlak. Zie de onderstaande figuur. Neem aan dat de lichtintensiteit van beide lichtbronnen gelijk is. De lichtbronnen zijn dan nog net gescheiden waar te nemen op het observatiescherm als het hoofdmaximum van het ene buigingspatroon (dus het midden van de heldere schijf) samenvalt met het eerste orde minimum van het andere buigingspatroon. Dit wordt het Rayleigh-criterium genoemd. Zie ook het diagram rechts in de figuur.



b.

Hoe groot is hoek β in de figuur bij een gatdiameter van 0,10 mm en een golflengte van 500 nm (net zoals bij vraag a)?

We passen het bovenstaande nu toe op het menselijk oog. Het gaatje in het obstructiescherm is dan de pupil en het observatiescherm is het netvlies. Dankzij de ooglenz staat het observatiescherm (netvlies) in het oneindige en geldt de verre veldbenadering. Stel dat iemand naar twee identieke lichtbronnen kijkt, zoals de twee koplampen van een auto of naar een dubbelster. Je kunt je dan afvragen hoe klein de hoek tussen de kijklijnen (uitgaande van één oog) kan zijn om de twee bronnen nog net gescheiden waar te nemen? We noemen deze hoek de 'hoekresolutie' van het oog. Als vuistregel wordt hiervoor meestal één boogminuut genomen. Een boogminuut is een 60-ste van een graad.

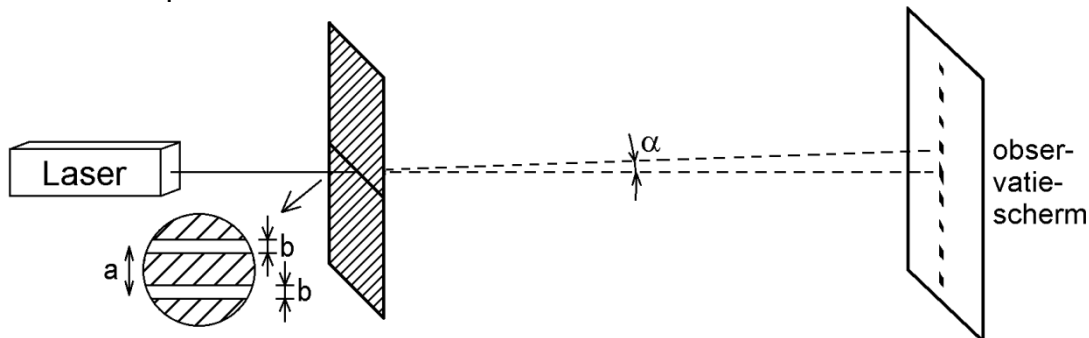
c.

Laat zien dat deze vuistregel aan de hoge kant zit. Ga daarbij uit van een golflengte van 500 nm en een pupildiameter van 4,0 mm.

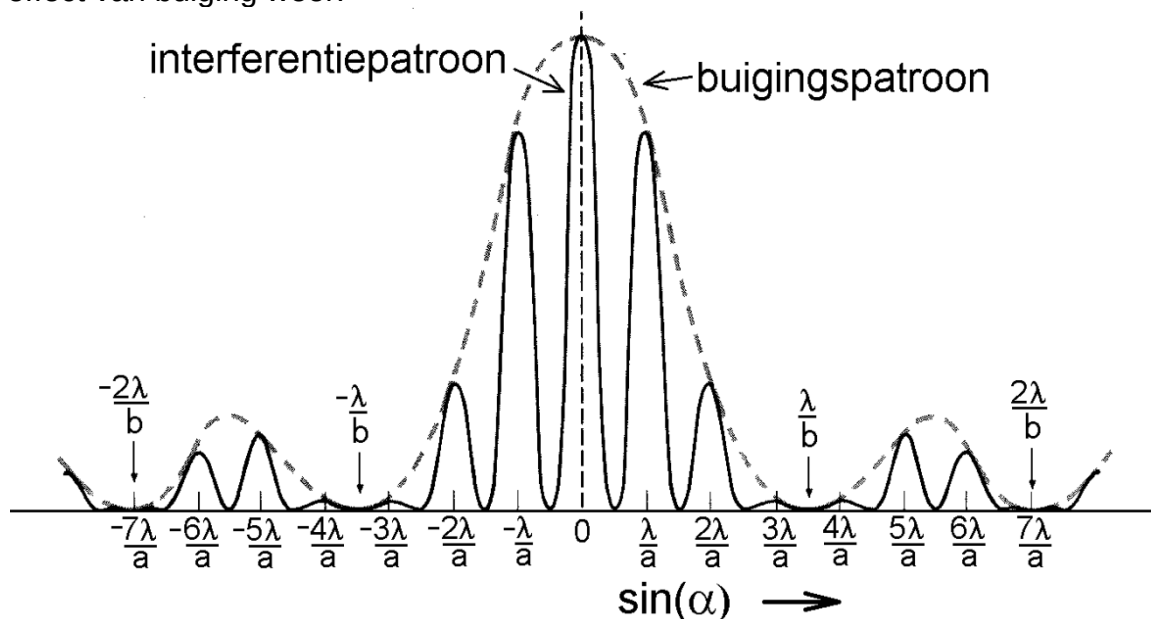
§ 8 Een golf door meerdere spleten

Twee spleten

In de onderstaande figuur valt een laserstraal op twee smalle horizontale spleten met spleetbreedte b . De afstand tussen de (middens van) spleten is a . Elke spleet kun je opvatten als een (niet puntvormige) trillingsbron zodat er op het scherm een interferentiepatroon van die twee lichtbronnen zichtbaar is.



Bij elke spleet treedt ook buiging (diffractie) op. Het beeld op het scherm is daarom het resultaat van interferentie én buiging. Het intensiteitsverloop op het scherm is in de onderstaande figuur weergegeven. De omhullende (onderbroken) lijn geeft het effect van buiging weer.



Een vorige paragraaf behandelde interferentie in het verre veld van een rij puntbronnen. De daar gevonden resultaten zijn ook toepasbaar op een rij van lijnbronnen. Voor de maxima van het interferentiepatroon geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a} \quad \text{met } n = 0, +1, -1, +2, -2, \text{ enzovoort.}$$

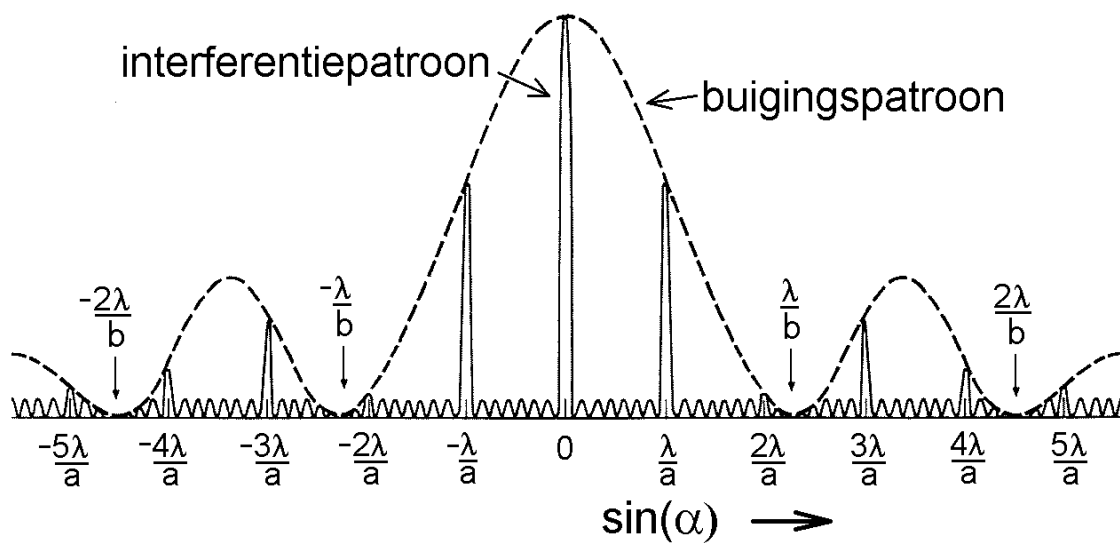
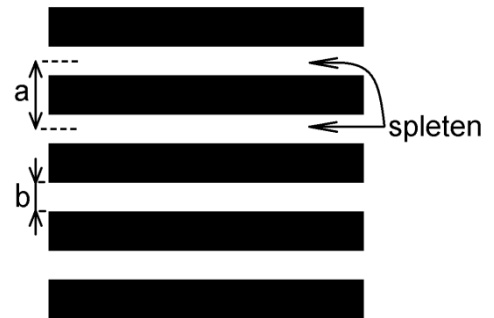
Ook hebben we in een vorige paragraaf afgeleid, dat voor de minima van het buigingspatroon geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{b} \quad \text{met } n = +1, -1, +2, -2, \text{ enzovoort.}$$

.

Tralie

We vervangen de twee spleten in de bovenstaande opstelling door veel meer spleten. Zie de figuur hiernaast waarin slechts een klein deel van de spleten sterk vergroot is weergegeven. Alle spleten staan op een onderlinge afstand a van elkaar en hebben spleetbreedte b . De pieken in het interferentiepatroon worden dan scherper. Zie het onderstaande diagram met acht spleten. Bij heel veel spleten (zeg duizend) spreken we van een tralie. Bij een tralie wordt de afstand a tussen de (middens van de) spleten de tralieconstante genoemd.

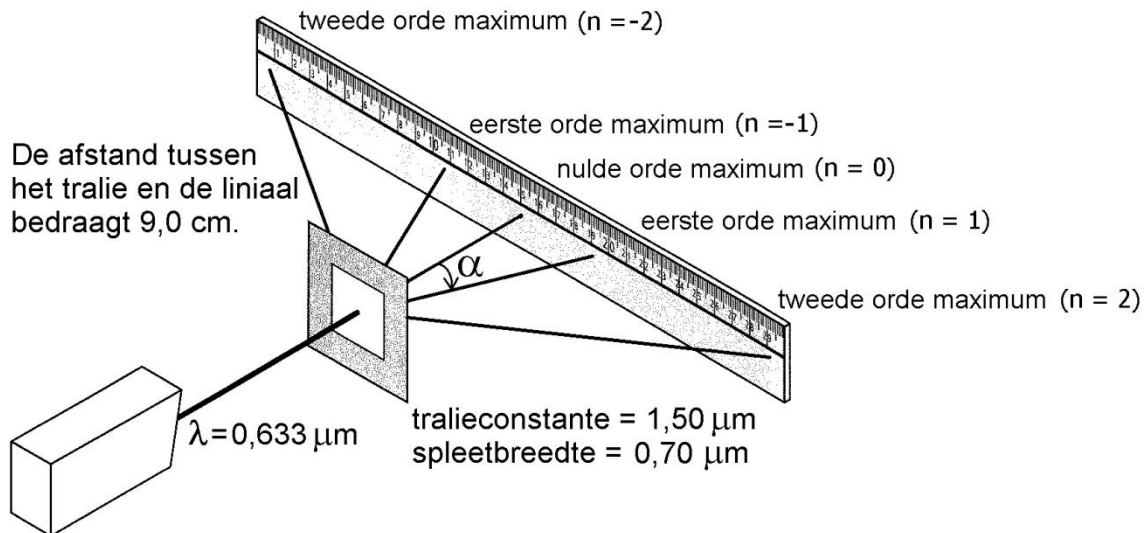


Opmerking

De bovenstaande theorie is niet alleen geldig voor lichtgolven maar ook voor andere soorten golven, bijvoorbeeld watergolven of geluidsgolven.

Getallenvoorbeeld

In de onderstaande figuur wordt een laserstraal op een tralie gericht. Op de liniaal achter het tralie is een interferentiepatroon zichtbaar. Zie de figuur voor de numerieke gegevens.



Voor hoek α , behorend bij het eerste orde interferentiemaximum, geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{a} = \frac{0,633 \mu\text{m}}{1,50 \mu\text{m}} = 0,422$$

Hieruit volgt $\alpha = 25,0^\circ$.

Voor de afstand op de liniaal tussen het nulde en eerste orde maximum geldt:

$$x = 9,0 \cdot \tan(25,0^\circ) = 4,2 \text{ cm}$$

Voor hoek α , behorend bij het tweede orde interferentiemaximum, geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{2\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 0,633 \mu\text{m}}{1,50 \mu\text{m}} = 0,844$$

Hieruit volgt $\alpha = 57,6^\circ$.

Voor de afstand op de liniaal tussen het nulde en tweede orde maximum geldt:

$$x = 9,0 \cdot \tan(57,6^\circ) = 14,2 \text{ cm}$$

Voor hoek α , behorend bij het eerste orde diffractieminimum, geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{b} = \frac{0,633 \mu\text{m}}{0,70 \mu\text{m}} = 0,904$$

Hieruit volgt $\alpha = 65^\circ$.

Kennelijk ligt dit minimum voorbij het tweede orde interferentiemaximum.

Opgaven bij § 8

Opgave 1

Een laserstraal valt loodrecht op een tralie met een tralieconstante van 1000 nm. Het laserlicht heeft een golflengte van 532 nm. De spleetbreedte bedraagt 600 nm.

a.

Bereken de afbuighoek die hoort bij het eerste orde interferentiemaximum.

b.

Bereken de afbuighoek die hoort bij het eerste orde buigingsminimum.

Opgave 2

Een laserstraal met monochromatisch licht valt loodrecht op een tralie dat 800 spleten per mm bevat. De afbuighoek die hoort bij het eerste orde interferentiemaximum bedraagt 21° . Op een scherm achter het tralie zijn de maxima als stippen zichtbaar. De afstand tussen het tralie en het scherm bedraagt 40 cm.

a.

Bereken de tralieconstante.

b.

Bereken de golflengte van het licht.

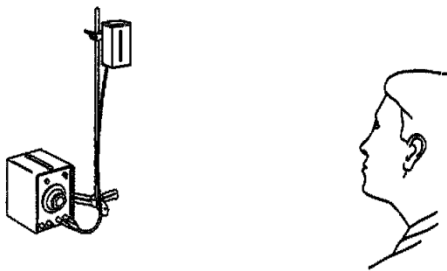
c.

Bereken de afstand tussen de nulde orde stip en de tweede orde stip op het scherm.

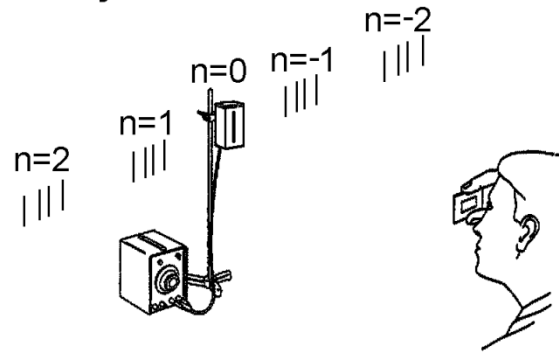
Opgave 3

In de onderstaande linker figuur kijk je naar een kastje dat aan de voorzijde één verticale spleet bevat waar wit licht uit komt. Dit witte licht bevat vier kleuren (vier golflengtes dus), waaronder rood (grootste golflengte) en blauw (kleinste golflengte). Uiteraard zie je, als je naar het kastje kijkt, één verticale witte streep. In de rechter figuur houd je een tralie voor je oog (het andere oog houd je dicht). Je ziet dan nog steeds dezelfde witte streep (nulde orde, $n = 0$) maar links en rechts van het kastje zie je ook een aantal gekleurde strepen. Die corresponderen met het eerste orde afgebogen licht ($n = +1$ en $n = -1$) en met het tweede orde afgebogen licht ($n = +2$ en $n = -2$).

Kijken zonder tralie



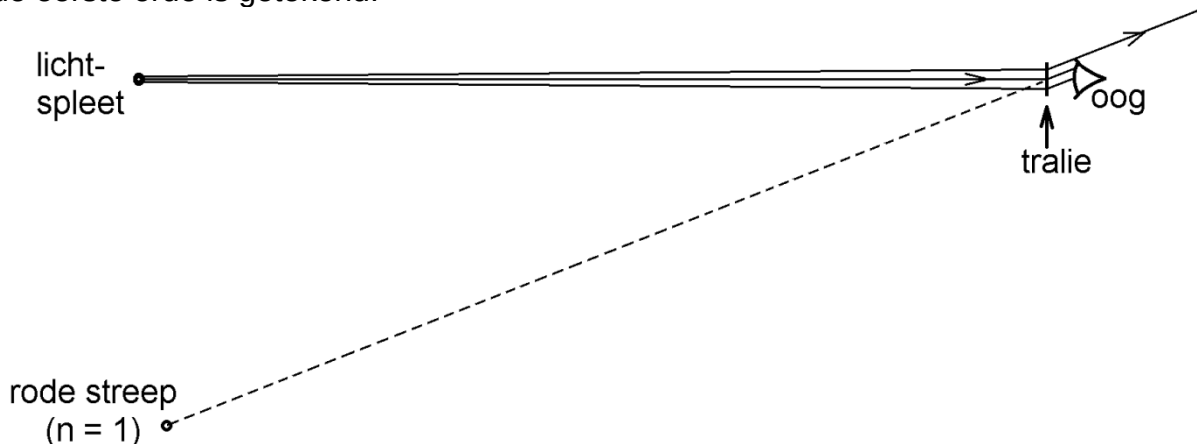
Kijken door tralie



a.

Leg uit of de spleten van het tralie verticaal of horizontaal gericht moeten zijn?

In de onderstaande figuur is het bovenaanzicht van de situatie getekend waarin je door een tralie naar de lichtspleet kijkt. Alleen het uit het tralie tredende rode licht van de eerste orde is getekend.



b.

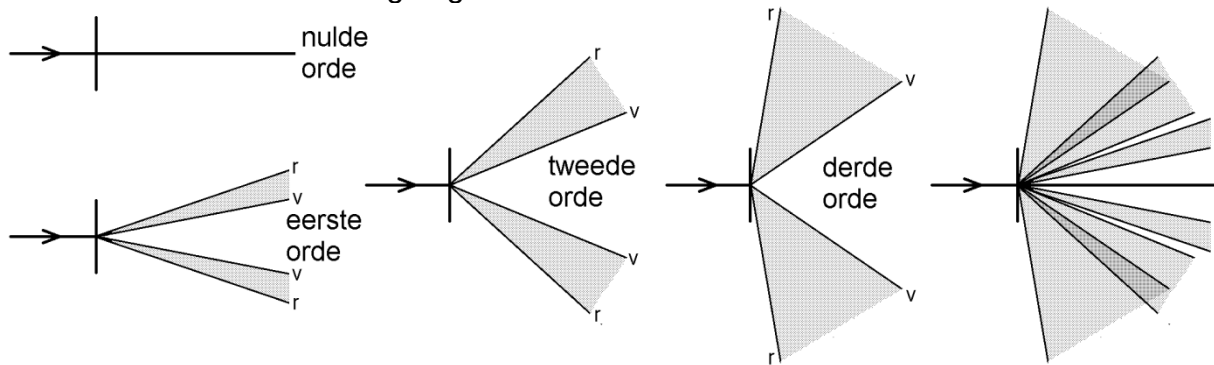
Geef in deze figuur globaal aan waar de eerste orde blauwe streep zit. Geef een korte toelichting (een berekening is niet nodig).

c.

Hoe verandert het strepenpatroon dat je ziet als je het tralie vervangt door een tralie met een kleinere tralieconstante? Leg je antwoord uit.

Opgave 4

In de volgende figuren valt een evenwijdige bundel wit licht op een tralie. Het witte licht bevat alle kleuren van de regenboog waarvan de golflengte ligt tussen 400 nm (violet) en rood (700 nm). De figuren laten globaal zien hoe de kleuren worden afgebogen bij de verschillende orden van interferentiemaxima. Let hierbij op de gearceerde bundels die tussen v (= violet) en r (= rood) liggen. De rechter figuur is een combinatie van de vorige figuren.



a.

Toon aan dat er geen overlap bestaat tussen de eerste orde en de tweede orde interferentiemaxima.

b.

Toon aan dat er wel overlap bestaat tussen de tweede en derde orde interferentiemaxima.

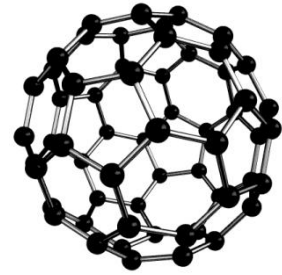
Door de spleetbreedte juist te kiezen, kan het derde orde interferentiemaximum verdwijnen (voor alle kleuren).

c.

Bereken hoeveel keer de tralieconstante groter moet zijn dan de spleetbreedte om de derde orde interferentiemaxima samen te laten vallen met het eerste orde buigingsminimum.

Opgave 5

Diamant en grafiet zijn zuivere vormen van koolstof. In 1985 is er een derde vorm van koolstof ontdekt. Deze bestaat uit moleculen die ieder 60 koolstofatomen bevatten. Door zijn vorm heeft het molecuul de naam 'voetbalmolecuul' of 'buckyball-molecuul' gekregen. Zie de figuur hiernaast. De massa van een voetbalmolecuul bedraagt $1,20 \cdot 10^{-24}$ kg.



Volgens de quantummechanica hebben losse deeltjes met massa m en snelheid v een golfkarakter. De golflengte hiervan, de zogenaamde de Broglie golflengte, kan berekend worden met:

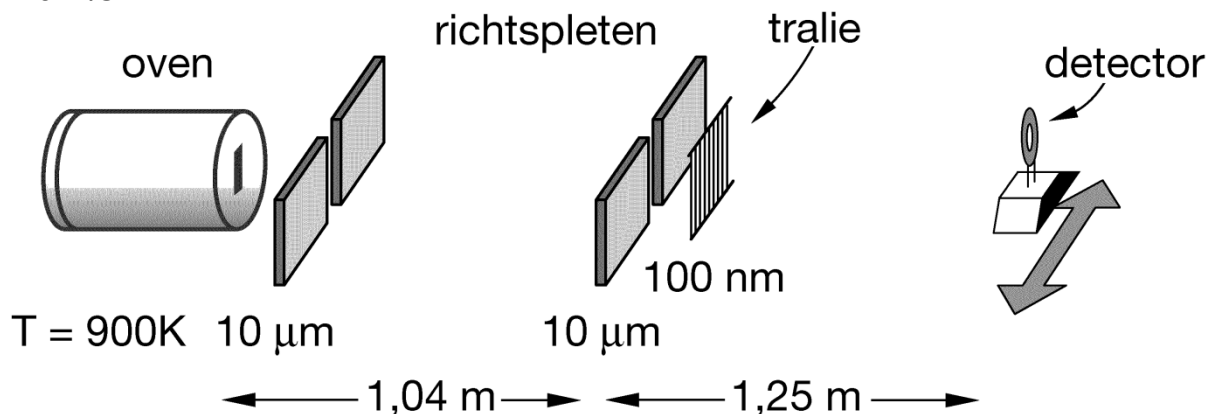
$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}.$$

Hierin is h de constante van Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js).

a.

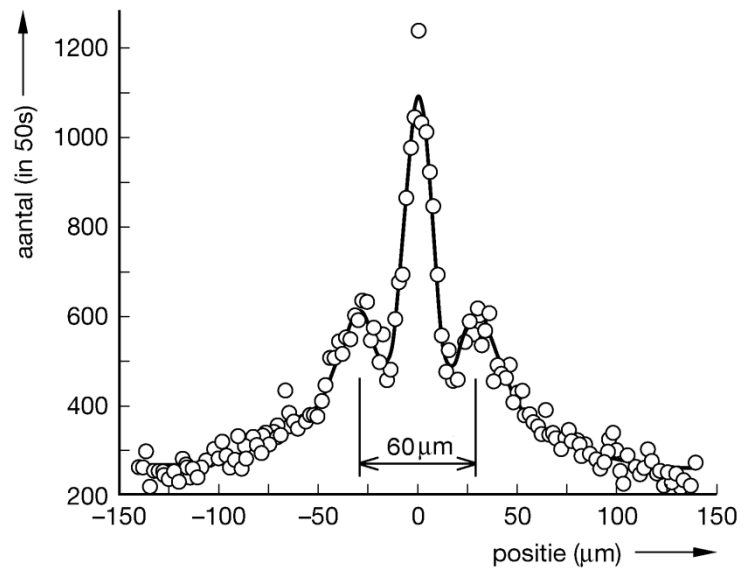
Bereken de golflengte van de voetbalmoleculen als deze een snelheid van 220 m/s hebben.

Om het golfkarakter van deze grote moleculen aan te tonen, zijn er in 1995 interferentieproeven mee gedaan. In de onderstaande figuur is de opstelling weergegeven. De bundel moleculen komt uit een oven en wordt vervolgens met behulp van twee smalle spleten goed gericht op een tralie met een tralieconstante van 100 nm. Op 1,25 m achter het tralie bevindt zich een detector, die een interferentiepatroon waarneemt. De snelheid van de voetbalmoleculen is ongeveer 220 m/s.



Het diagram hiernaast toont het interferentiepatroon van de voetbalmoleculen. In het diagram zijn twee nevenmaxima (de twee pieken aan weerszijden van het midden) en het hoofdmaximum (de piek in het midden) duidelijk zichtbaar.

b.
Bereken aan de hand van het diagram de de Broglie golflengte van de voetbalmoleculen in dit experiment.

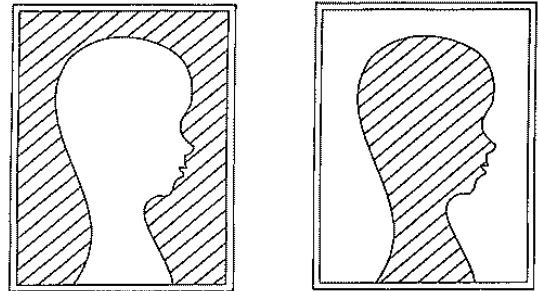


c.
Vergelijk de antwoorden op vraag a en b met elkaar.

§ 9 Principe van Babinet

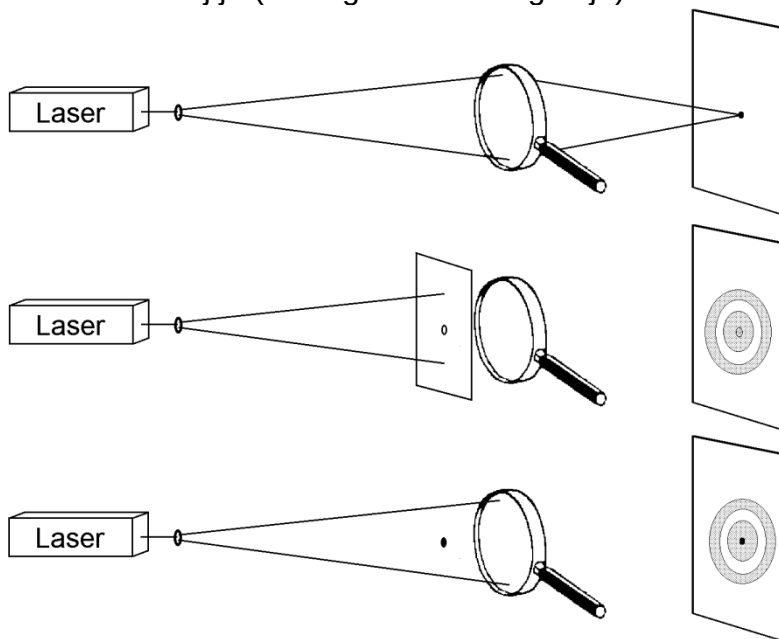
Complementaire schermen

In de figuren hiernaast zijn twee complementaire schermen afgebeeld. Twee schermen, S1 en S2, zijn complementair, als S2 uit S1 ontstaat door het ondoorzichtige deel doorzichtig te maken en het doorzichtige deel ondoorzichtig.



Principe van Babinet

In de onderstaande drie figuren wordt een laserstraal door een holle lens divergerend gemaakt. In de bovenste figuur valt de lichtbundel daarna op een bolle lens, die de bundel laat convergeren tot een punt op het scherm. In de tweede en derde figuur bevinden zich complementaire schermen voor de lens. In de tweede figuur bevat het scherm een klein rond gaatje. In de derde figuur bestaat het scherm slechts uit een klein rond schijfje (even groot als het gaatje).



In de tweede en derde figuur is er op het observatiescherm (niet te verwarren met de obstructieschermen voor de lens) een diffractiepatroon zichtbaar. Beide patronen blijken gelijk te zijn. Dit is in overeenstemming met het 'principe van Babinet' dat zegt dat de diffractiepatronen (en interferentiepatronen) bij complementaire schermen gelijk zijn, afgezien van het doorgaande licht in het geval dat er geen (obstructie)scherm zou zijn.

Het principe van Babinet iets uitvoeriger beschreven

In het algemeen wekt de bron (zoals een laser) bij het observatiescherm trillingen op. Dat kan op drie manieren, namelijk zonder obstructiescherm, met S1 en met S2 (die complementair is aan S1). De uitwijking van de trillingen bij het observatiescherm kunnen we symbolisch met de functie $u(x,y,t)$ weergeven, waarbij x en y de plaatscoördinaten op het observatiescherm zijn en t de tijd is. Het ligt dan voor de hand om onderscheid te maken tussen drie functies, namelijk:

- 1) $u_0(x,y,t)$ als er geen obstructiescherm is;
- 2) $u_1(x,y,t)$ in de aanwezigheid van S1 en
- 3) $u_2(x,y,t)$ in de aanwezigheid van S2.

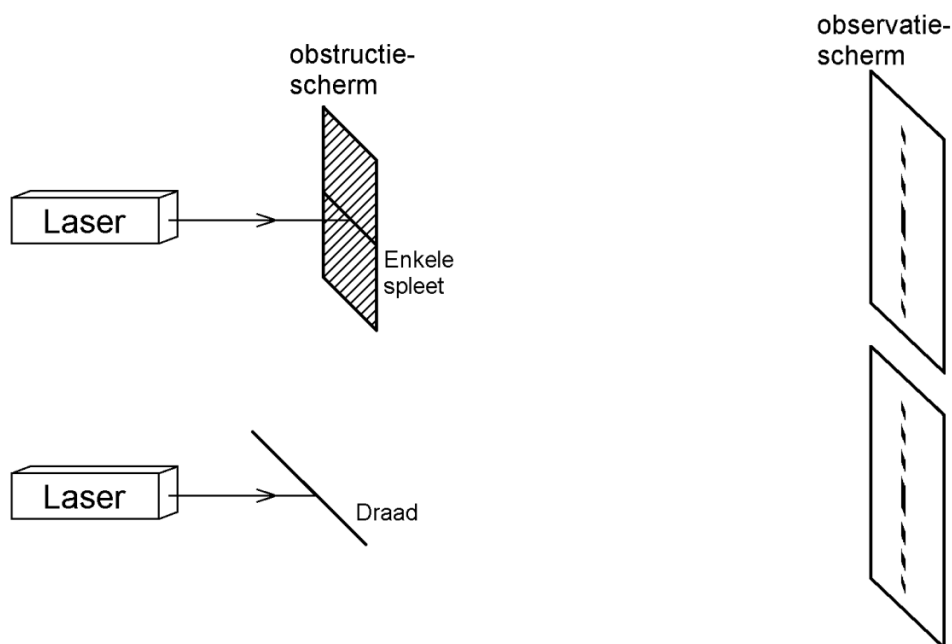
Volgens het principe van Babinet geldt nu: $u_0(x,y,t) = u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t)$.

Dit laatste is logisch want de verzameling secundaire bronnen in de aanwezigheid van scherm S1 plus de verzameling secundaire bronnen in de aanwezigheid van scherm S2 vormt de totale groep secundaire bronnen als er geen scherm is.

We kijken nu naar plaatsen op het observatiescherm waar u_0 nul is. In het voorgaande voorbeeld was dat buiten de binnenste stip op het observatiescherm. Volgens het principe van Babinet moet daar dus gelden: $u_1 = -u_2$. Dat wil zeggen dat de golven bij het observatiescherm met S1 in tegenfase zijn met de golven met S2. Voor de intensiteit maakt het minteken niet uit en zijn de diffractiepatronen met S1 en met S2 dus gelijk aan elkaar.

Nog een voorbeeld van het principe van Babinet

In de onderstaande figuren is een laserstraal op een enkele spleet in een ondoorzichtig obstructiescherm en op een draad gericht. De diameter van de draad is gelijk aan de breedte van de spleet. Het diffractiepatroon op het scherm (rechts in de figuren) blijkt in beide gevallen gelijk te zijn. Dit volgt uit het 'principe van Babinet', want de draad en de spleet zijn complementair.



Getallenvoorbeeld

De dikte van een mensenhaar is op een eenvoudige manier te bepalen door deze in een laserbundel te houden. De opstelling is in de figuur hierboven afgebeeld. Stel dat het laserlicht een golflengte heeft van 532 nm (groen licht) en dat de afstand tussen de haar en het scherm 4,0 m bedraagt. Stel tenslotte dat op het scherm de afstand tussen de middenstip (afbuighoek = 0) en het eerste orde diffractieminimum 4,4 cm bedraagt. De berekening gaat dan als volgt.

Als eerste kunnen we de afbuighoek α behorend bij het eerste orde diffractieminimum berekenen. Uit $\tan(\alpha) = 4,4 \text{ cm} / 400 \text{ cm}$ volgt $\alpha = 0,630^\circ$.

Als D de diameter van de haar is, geldt: $\sin(\alpha) = \lambda / D$.

Hieruit volgt:

$$D = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)} = \frac{532 \text{ nm}}{\sin(0,630^\circ)} = 48 \text{ } \mu\text{m} .$$

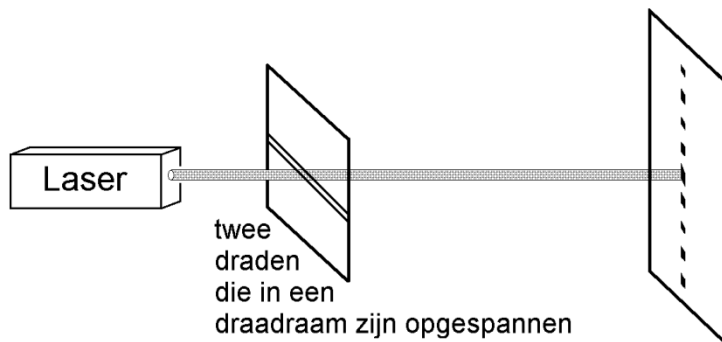
Opmerking

Om de dikte van een haar of een dunne draad nauwkeuriger te bepalen, kun je een hogere orde diffractieminimum nemen. De relatieve meetfout van de afstand op het scherm wordt dan kleiner.

Opgaven bij § 9

Opgave 1

In de figuur hiernaast valt een laserstraal op twee dunne draden die in een draadraam zijn opgespannen. Voorbij het draadraam bevindt zich een scherm waarop een interferentie- en diffractiepatroon zichtbaar is. De figuur is niet op schaal.



a.

Omschrijf het complementaire scherm van de twee draden.

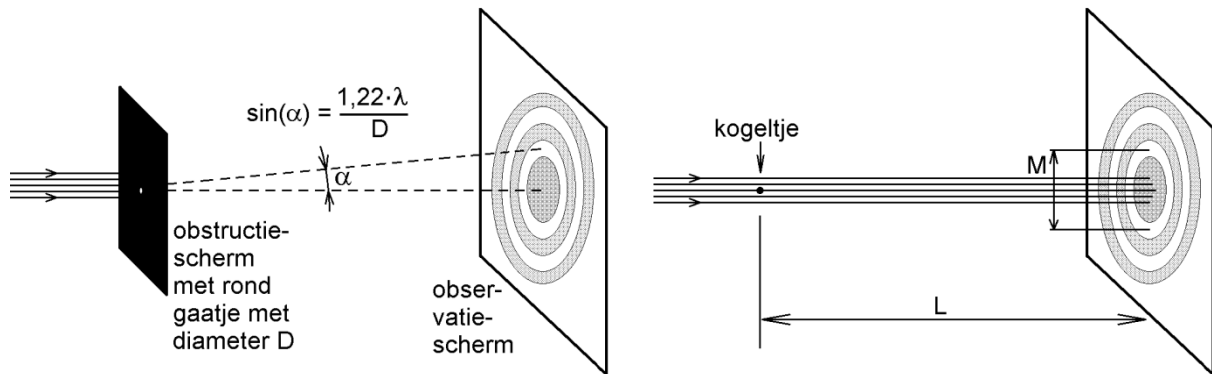
De afstand tussen het draadraam en het scherm bedraagt 2,0 meter. De afstand tussen de interferentiemaxima op het scherm bedraagt 2,0 cm. De golflengte van het licht bedraagt 500 nm.

b.

Bereken de afstand tussen de twee draden.

Opgave 2

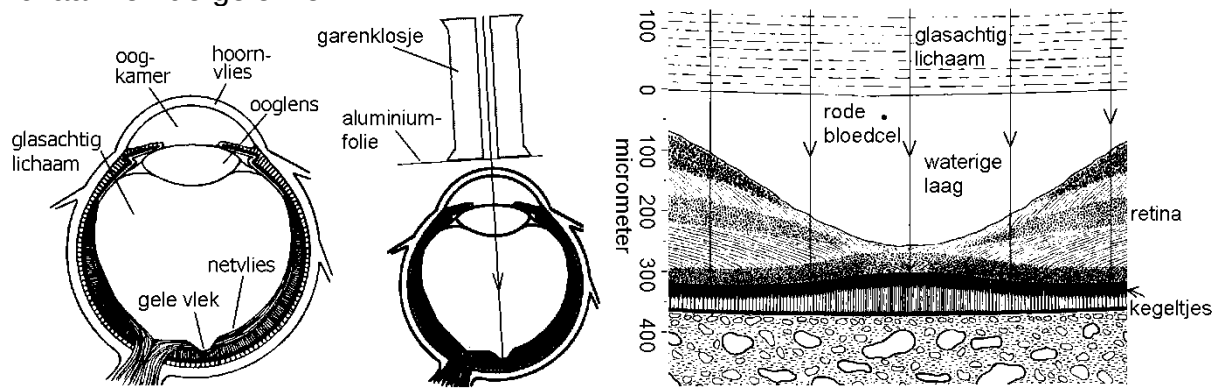
In de onderstaande linker figuur valt een laserstraal op een obstructiescherm met een klein rond gaatje erin. Op het observatiescherm is een diffractiepatroon zichtbaar. De in de figuur gegeven uitdrukking heeft betrekking op de afbuighoek naar het eerste minimum.



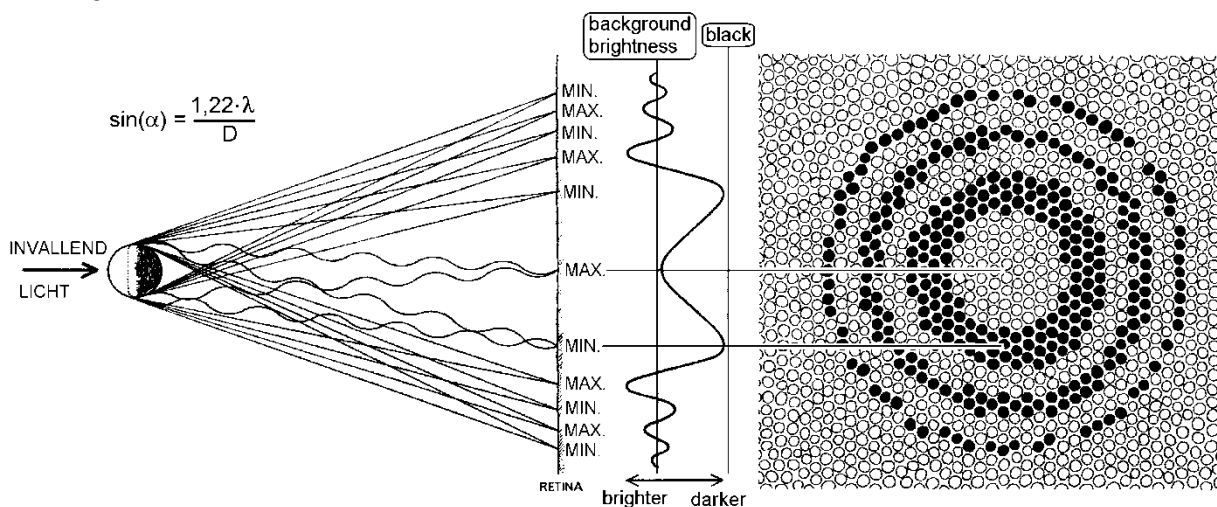
In de rechter figuur bevindt zich een kogeltje in de lichtbundel. Ook nu is er een diffractiepatroon op een scherm zichtbaar. De golflengte van het laserlicht bedraagt 532 nm. De afstand L tussen het kogeltje en het scherm bedraagt 5,5 m. Op het scherm is de diameter M van het cirkelvormige minimum gelijk aan 4,5 cm. Bereken de diameter van het kogeltje.

Opgave 3

Deze opgave gaat over 'floaters'. Dat zijn kleine deeltjes die zich binnenin het oog bevinden vlakbij het netvlies. Je ziet ze als zwarte bolletjes of draadjes die meebewegen bij oogverdraaiingen en waar je je niet of nauwelijks op kunt richten. Ze zijn goed waarneembaar als je bijvoorbeeld naar de blauwe hemel kijkt. De onderstaande linker figuur toont de anatomie van het gehele oog. Het netvlies bevat de 'gele vlek'. Daar liggen de kegeltjes (lichtgevoelige cellen) het dichtst bij elkaar. Op die plek zit er een soort kuiltje (dal) in het netvlies. De middelste figuur geeft een eenvoudige manier weer hoe je floaters kunt bestuderen. Je kijkt dan door een heel klein gaatje (pinhole) in aluminiumfolie dat tegen de onderkant van een garenklosje geplakt is. Hierdoor is de lichtbundel die op je oog valt bij benadering evenwijdig. De rechter figuur geeft de plaats van de best waarneembare floaters in het oog weer. Ze bevinden zich in de dunne waterige laag tussen het glasachtig lichaam en de gele vlek.



Floaters kunnen onder andere losse rode bloedcellen zijn en in deze opgave beperken we ons daartoe. Door de osmotische druk neemt het omhullende vlies van zulke cellen een bolvorm aan. De diameter van een rode bloedcel in de waterige laag bedraagt $8,0 \mu\text{m}$. In de onderstaande figuur is buiging van het licht rond een rode bloedcel getekend. Vergeleken met de bovenstaande figuren is de figuur gekanteld en komt het licht van links. Ook is het diffractiepatroon op het netvlies getekend. De in de figuur gegeven formule heeft betrekking op de afbuighoek α naar het eerste minimum in het 'verre veld'.



a.

Leg uit waarom het belangrijk is dat het licht in het oog bij benadering evenwijdig is.

Stel dat er monochromatisch licht (dus van één kleur) op je oog valt met een golflengte van $0,60\ \mu\text{m}$. Stel verder dat de brekingsindex van de waterige laag 1,3 bedraagt. De brekingsindex geeft aan hoeveel keer het licht in een doorzichtige stof langzamer loopt dan in vacuüm (of lucht).

b.

Bereken dan de golflengte van het licht in de waterige laag. Bedenk daarbij dat de frequentie van het licht bij de overgang van het ene naar het andere medium onveranderd blijft.

Stel dat de rode bloedcel $300\ \mu\text{m}$ van de kegeltjes verwijderd is.

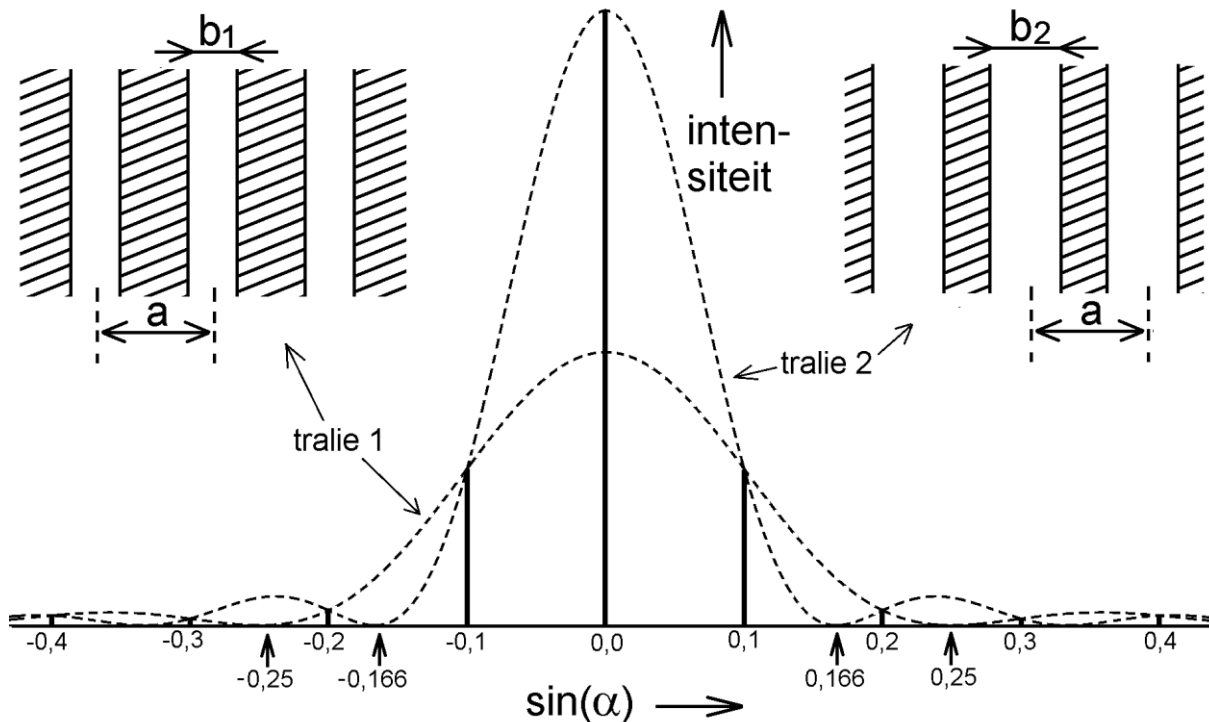
c.

Bereken dan de diameter van het cirkelvormige eerste orde minimum bij de kegeltjes.

Opgave 4

Men richt een laserstraal eerst op tralie 1 en daarna op tralie 2. Beide tralies hebben dezelfde tralieconstante a . Beide tralies verschillen echter wel wat de spleetbreedte betreft. Van tralie 1 is deze b_1 en van tralie 2 is deze b_2 . In de onderstaande tekeningen zijn a , b_1 en b_2 weergegeven.

Het onderstaande diagram geeft het interferentiepatroon van de tralies in het verre veld weer. De afbuighoeken α van de interferentiemaxima zijn zeer scherp bepaald. Daarom bestaat het interferentiepatroon (bij benadering) alleen uit verticale strepen. Deze strepen bevinden zich voor beide tralies bij afbuighoeken waarvoor geldt: $\sin(\alpha) = n \cdot 0,1$ waarbij n een geheel getal is.



De twee gestippelde kromme lijnen stellen de buigingspatronen van afzonderlijke spleten van tralie 1 en tralie 2 voor. Deze gestippelde lijnen vormen de bovengrens van de verticale strepen. Zoals in het diagram te zien is, zijn de verticale strepen van tralie 1 even lang als de overeenkomstige verticale strepen van tralie 2 met uitzondering van de middelste verticale streep. Deze is bij tralie 2 langer.

a.

Bereken hoeveel keer de tralieconstante a groter is dan de golflengte.

b.

Tralie 1 heeft zijn eerste diffractieminimum waarvoor geldt: $\sin(\alpha) = 0,25$ of $-0,25$. Bereken hoeveel keer de spleetbreedte b_1 groter is dan de golflengte.

c.

Tralie 2 heeft zijn eerste diffractieminimum waarvoor geldt: $\sin(\alpha) = 0,166$ of $-0,166$. Bereken hoeveel keer de spleetbreedte b_2 groter is dan de golflengte.

d.

Leg met de hiervoor gevonden waarden uit dat de tralies complementair zijn.

e.

Geef aan hoe uit het diagram blijkt dat de tralies complementair zijn.

f.

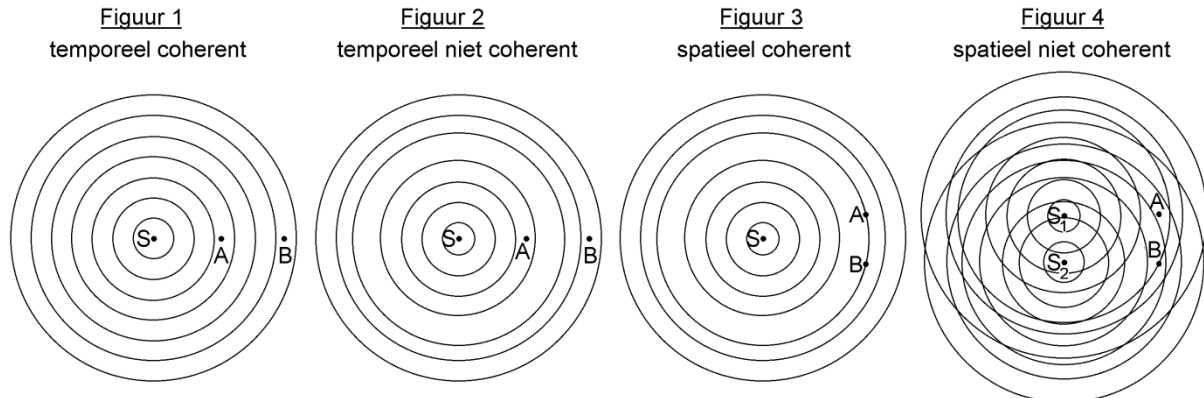
In het diagram is bij tralie 2 het nulde orde maximum 2,25 keer zo hoog als bij tralie 1. Verklaar dit.

§ 10 Coherentie van licht

Temporele en spatiële coherentie bij watergolven

Bij coherentie van licht maken we onderscheid tussen temporele en spatiële coherentie. Het verschil hiertussen kan worden uitgelegd aan de hand van een watergolf in een grote vijver. Met een hengel laat je een dobber S (van source = bron) harmonisch op- en neer bewegen. Hierdoor breidt een cirkelvormige golf op het wateroppervlak zich naar buiten toe uit. Twee kurken A en B drijven op twee willekeurige plaatsen op het wateroppervlak en voeren ieder een op- en neergaande beweging uit. Als de (water)golf coherent is, verandert het faseverschil tussen de kurken niet met de tijd. Bij een faseverschil van bijvoorbeeld 0 zullen beide kurken elke keer opnieuw gelijktijdig in de bovenste stand zitten. Bij een faseverschil van bijvoorbeeld $1/2$ (de kurken bewegen dan in tegenfase) zullen de kurken elke keer opnieuw gelijktijdig in tegengestelde uiterste standen zitten (boven en onder).

Bij temporele coherentie kijken we in de bewegingsrichting van de golf. De dobber S, kurk A en kurk B bevinden zich dan op één lijn. Zie de onderstaande figuren 1 en 2. Zolang de dobber met één en dezelfde frequentie op en neer beweegt, blijft het faseverschil tussen A en B gelijk. We zeggen dan dat de golf 'temporeel coherent' is. Dit is het geval in figuur 1. Als de frequentie van de dobber af en toe anders wordt (bijvoorbeeld als je de hengel met je andere hand overneemt), heeft dat tot gevolg dat het faseverschil tussen A en B verandert. De golf is dan niet meer temporeel coherent (of tenminste verminderd temporeel coherent). Dit is het geval in figuur 2 waarin de afstand tussen de cirkels varieert.



Bij spatiële coherentie kijken we in de richting loodrecht op de bewegingsrichting van de golf. De kurken A en B bevinden zich dan op gelijke afstand tot de dobber zoals in de bovenstaande figuur 3 is getekend. Het faseverschil tussen A en B is steeds nul, want de kurken voeren precies dezelfde beweging uit. We zeggen dan dat de (water)golf 'spatieel coherent' is. Dit is bij een puntbron (hier de dobber) altijd het geval. In figuur 4 zijn er twee dobbers S₁ en S₂ die onafhankelijk van elkaar op en neer gaan. Bij kurk A en kurk B komen dan golven aan die van beide dobbers afkomstig zijn. De beweging van kurk A is wezenlijk anders dan die van kurk B en het faseverschil is zeker niet constant. In figuur 4 is er dus geen spatiële coherentie.

Als de afstand tussen de twee bronnen S_1 en S_2 kleiner wordt, lijken beide kurkbewegingen meer op elkaar en wordt de spatiële coherentie beter. In het limietgeval waarin S_1 en S_2 samenvallen, is er sprake van slechts één puntbron en is de spatiële coherentie perfect. Dit is ook het geval als S_1 en S_2 gescheiden blijven maar zich op zeer grote afstand van de kurken A en B bevinden. Ter plaatse van de kurken zijn de golffronten dan vlak in plaats van gekromd.

Samenvatting

Hierboven werd het begrip coherentie uitgelegd aan de hand van watergolven. Coherentie kan echter voor alle golven gebruikt worden, dus ook voor lichtgolven. We kunnen het bovenstaande als volgt samenvatten.

Bij coherentie is het faseverschil tussen de trillingen op twee willekeurig gekozen plaatsen constant. Bij temporele coherentie kijken we in de bewegingsrichting van de golf en bij spatiële coherentie kijken we loodrecht op de bewegingsrichting van de golf. Als een trillingsbron met slechts één frequentie trilt, is de uitgezonden golf temporeel coherent. Als de trillingsbron een puntbron is of als de trillingsbron (met eindige afmetingen) oneindig ver weg is, is de golf spatieel coherent.

Coherentie bij lichtbronnen

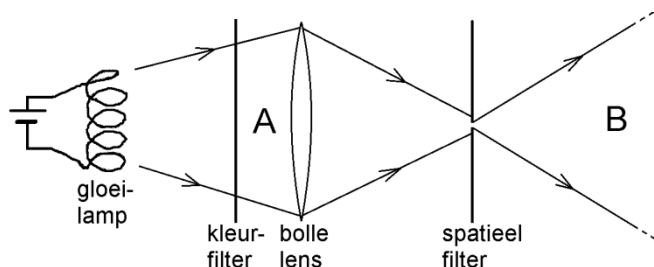
We noemen een lichtbron monochromatisch als hij maar één kleur uitzendt. Het licht van zo'n lichtbron heeft dan maar één golflengte en dus één frequentie. Het uitgezonden licht van een monochromatische lichtbron is dus temporeel coherent. In de praktijk wordt nooit slechts één frequentie uitgezonden maar een (smalle) frequentieband, zoals bij een laser het geval is. Laserlicht is dus in goede benadering temporeel coherent. Omgekeerd zenden een kaarsvlam, gloeilamp of een tl-lamp vele kleuren uit en is hun uitgezonden licht beslist niet temporeel coherent.

Puntvormige lichtbronnen zenden spatieel coherent licht uit. Hetzelfde geldt voor ver weg gelegen lichtbronnen zolang de afmetingen van de lichtbron zeer veel kleiner zijn dan de afstand tot de waarnemer. Zo is het licht van een ster zonder meer spatieel coherent te noemen. Dit licht bereikt de aarde als een vlakke golf, dat wil zeggen dat de golffronten vlak zijn. Vlakke golven zijn altijd spatieel coherent. Het licht van een laserstraal is ook (bij benadering) een vlakke golf en dus spatieel coherent.

Temporeel en spatieel filter

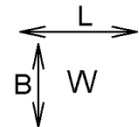
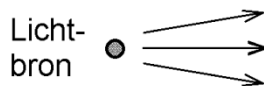
In de figuur hiernaast zendt een gloeilamp licht uit dat zowel temporeel als spatieel volstrekt incoherent is. Toch is het mogelijk om met filtering coherentie te krijgen. Allereerst wordt het licht temporeel gefilterd met een kleurfilter. In gebied A is het licht dan al bij benadering temporeel coherent.

Vervolgens wordt het licht met behulp van een bolle lens op een piepklein gaatje (pinhole) in een plaat gericht. Zo'n plaat met gaatje wordt een spatieel filter genoemd. In gebied B is het licht dan ook spatieel coherent omdat het gaatje als een puntbron opgevat kan worden.

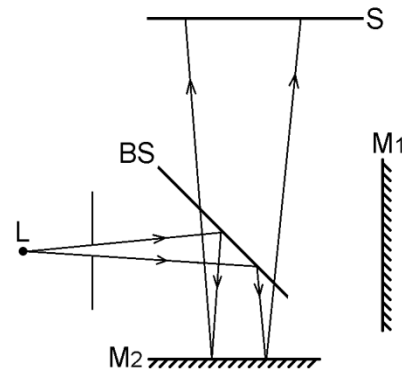
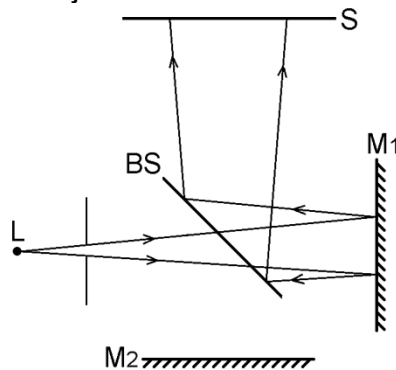


Temporele coherentielengte en spatiële coherentiebreedte

In de onderstaande figuur zendt een kleine lichtbron binnen een smalle kleurenband licht uit in de richting van waarnemer W. De 'temporele coherentielengte' L (kortweg coherentielengte genoemd) en de 'spatiële coherentiebreedte' B (kortweg coherentiebreedte genoemd) geven de afstanden aan waarbinnen het licht globaal coherent is. Meestal lopen de overgangen van coherent naar incoherent geleidelijk. Zoals hierna beschreven wordt, kan de coherentielengte met de zogenoemde 'Michelson interferometer' bepaald worden en de coherentiebreedte met de zogenoemde 'proef van Young'

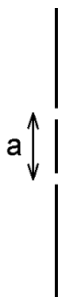
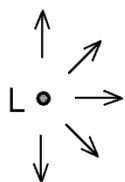


In de onderstaande twee figuren is de Michelson interferometer getekend. De lichtbron L zendt licht uit dat door een ronde opening van een scherm gaat. Vervolgens valt de lichtbundel op de half doorlaatbare spiegel BS (= beam splitter). De helft van het licht gaat rechtdoor en wordt door spiegel $M1$ gereflecteerd. Het verdere verloop van deze lichtbundel is in de linker figuur weergegeven. De andere helft van het licht wordt door BS gereflecteerd en vervolgens ook door spiegel $M2$ gereflecteerd. Het verdere verloop hiervan is in de rechter figuur weergegeven. Uiteindelijk vallen er dus twee lichtbundels op scherm S .



Op het scherm (S) ontstaat een interferentiepatroon van concentrische cirkels. Als we spiegel $M1$ naar rechts verschuiven, neemt de lichtweg van laser tot scherm in de linker figuur toe terwijl hij in de rechter figuur gelijk blijft. Je kunt spiegel $M1$ zo ver naar rechts verschuiven, totdat het interferentiepatroon op het scherm vervaagt en tenslotte helemaal verdwijnt. In dat geval is het weglengteverschil tussen de lichtbundel in de linker en in de rechter figuur groter dan de temporele coherentielengte.

In de onderstaande figuur is de proef van Young getekend. Hierin verlicht de lichtbron L een scherm met twee gaatjes. Op het observatiescherm S ontstaat een interferentiepatroon. Als we de afstand a tussen de gaatjes groter maken, neemt de afstand tussen de maxima op het scherm af zoals we in de voorgaande paragrafen hebben geleerd. Bovendien wordt het interferentiepatroon op een gegeven moment vager. Bij een nog grotere afstand tussen de gaatjes verdwijnt het interferentiepatroon zelfs helemaal. In dat geval is de afstand tussen de gaatjes groter dan de spatiële coherentiebreedte van het licht.



Opgaven bij § 10

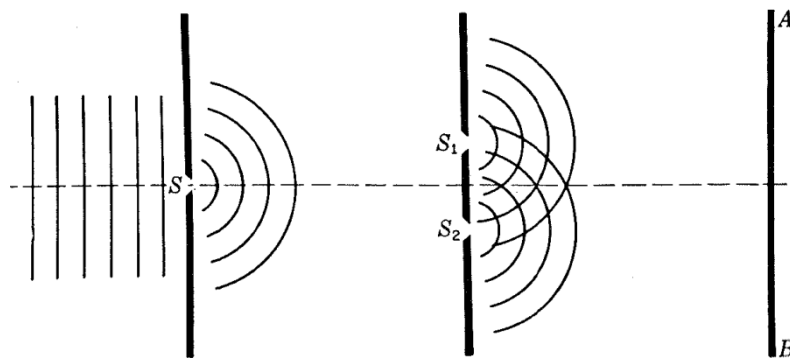
Opgave 1

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar of niet waar zijn.

- a)
Laserlicht is in vergelijking met licht van een kaars of van een gloeilamp temporeel en spatieel coherent.
- b)
Het licht van een kaars is op kleine afstand spatieel coherent.
- c)
Het licht van een kaars is op zeer grote afstand spatieel coherent.
- d)
Het licht van een kaars is op kleine afstand temporeel coherent.
- e)
Het licht van een kaars is op zeer grote afstand temporeel coherent.
- f)
Zuiver monochromatisch licht is altijd spatieel coherent.
- g)
Zuiver monochromatisch licht is altijd temporeel coherent.
- h)
Met een kleurfilter kun je de temporele coherentie verbeteren.

Opgave 2

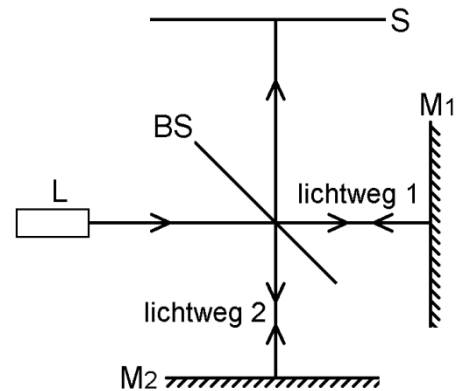
In de onderstaande figuur is het originele experiment van Young schematisch weergegeven waarmee hij aantoonde dat licht een golfverschijnsel is. Zonlicht valt op een scherm met een klein gaatje S (een pinhole). Het doorgelaten licht valt op een tweede scherm met gaatjes S_1 en S_2 . Op scherm AB is een interferentiepatroon zichtbaar.



Leg uit wat het doel is van het eerste gaatje S.

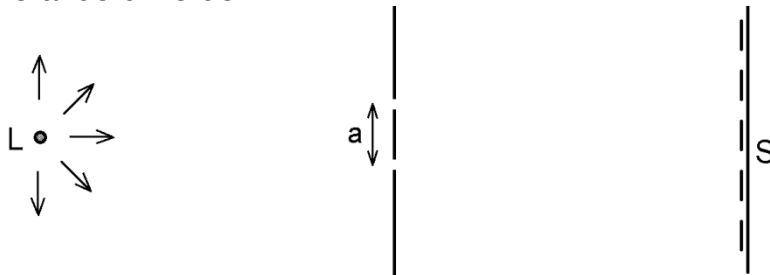
Opgave 3

In de figuur hiernaast is een Michelson interferometer afgebeeld. Het licht van laser L heeft een coherentielengte van 2 mm. In de tekening is de afstand van beide lichtwegen gelijk. Hoeveel moet spiegel M1 naar rechts geschoven worden om interferentie van beide laserstralen op scherm S onmogelijk te maken?



Opgave 4

In de onderstaande figuur is de proef van Young afgebeeld. Lichtbron L zendt licht binnen een smalle kleurenband uit. De afstand a tussen de gaatjes kan niet veranderd worden.



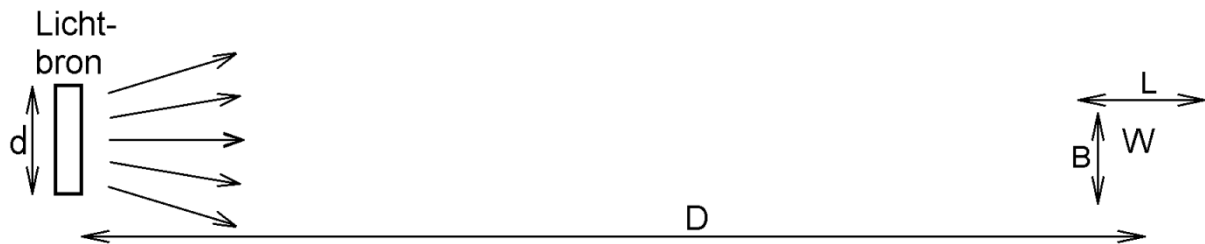
a.
Onder welke voorwaarde is er op het observatiescherm S een interferentiepatroon zichtbaar?

b.
Stel dat afstand a tussen de gaatjes te groot is om een interferentiepatroon op het observatiescherm te krijgen. Wat zou je dan aan de opstelling kunnen veranderen om toch een interferentiepatroon op scherm S te krijgen?

§ 11 Temporele coherentielengte en spatiële coherentiebreedte

Temporele coherentielengte

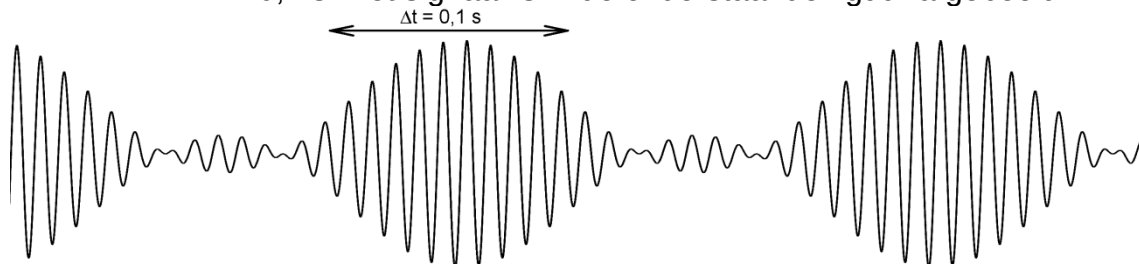
In de volgende figuur zendt een lichtbron binnen een klein frequentiegebiedje licht uit in de richting van waarnemer W. De 'temporele coherentielengte' L (kortweg coherentielengte genoemd) en de 'spatiële coherentiebreedte' B (kortweg coherentiebreedte genoemd) geven de afstanden aan waarbinnen het licht globaal coherent is. Meestal lopen de overgangen van coherent naar incoherent geleidelijk.



De temporele coherentielengte L is nauw verbonden met de coherentietijd Δt . Beide geven aan hoe monochromatisch het uitgezonden licht is. Binnen de coherentietijd heeft het licht grofweg een periodiek karakter. Als vuistregel geldt:

$$\Delta t \cong \frac{1}{\Delta f}.$$

Hierin is Δf de breedte van de frequentieband van het licht. Het wiskundige teken na Δt kan worden gelezen als "is in de orde van". Laten we eerst kijken naar het extreme geval waarbij $\Delta f = 0$ en dus $\Delta t = \infty$. Het licht is dan perfect monochromatisch (slechts één frequentie) en de sinusvormige golf loopt van min oneindig naar plus oneindig. In de praktijk is Δf altijd groter dan nul. Neem bijvoorbeeld een signaal dat drie frequenties bevat, namelijk 100 Hz, 95 Hz en 105 Hz. Dan is Δf gelijk aan 10 Hz en Δt in de orde van 0,1 s. Het signaal is in de onderstaande figuur afgebeeld.



De temporele coherentielengte L is de afstand die het licht gedurende de coherentietijd aflegt. Voor de coherentielengte geldt dan dus (met c = lichtsnelheid):

$$L \cong \frac{c}{\Delta f}$$

Merk op dat bij volledig monochromatisch licht Δf nul is en L dus oneindig groot wordt, hetgeen te verwachten is. We moeten ons overigens blijven realiseren dat de laatste formule slechts een ruwe indicatie van de temporele coherentielengte geeft.

Neem het volgende getallenvoorbeeld.

Een rode led zendt licht uit met golflengtes tussen globaal 620 nm ($= \lambda_{\min}$) en 640 nm ($= \lambda_{\max}$). Hieruit volgt voor de bandbreedte van de uitgezonden frequenties:

$$\Delta f = \frac{c}{\lambda_{\min}} - \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{3 \cdot 10^8}{620 \cdot 10^{-9}} - \frac{3 \cdot 10^8}{640 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

Voor de temporele coherentielengte geldt dan:

$$L \cong \frac{c}{\Delta f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{13}} = 20 \text{ } \mu\text{m}.$$

Spatiële coherentiebreedte

Laten we nu naar de spatiële coherentiebreedte B kijken. Zie de eerdere figuur waarin deze al was weergegeven. We nemen aan dat elk punt van de lichtbron onafhankelijk van de andere punten licht uitzendt (niet-coherente lichtpunten dus). Denk hierbij bijvoorbeeld aan een gele natriumlamp. Ook kunnen we de zon nemen, mits het zonlicht spectraal gefilterd is (één kleur). Een ruwe indicatie voor de spatiële coherentiebreedte B geeft de volgende formule.

$$B \cong \frac{\lambda \cdot D}{d}$$

Hierin is D de afstand tussen de bron en de waarnemer en d de lengte of breedte van de lichtbron. Merk op dat als d afneemt, de bron meer op een puntbron gaat lijken en de spatiële coherentiebreedte groter wordt, zoals verwacht. Hetzelfde geldt als D groter wordt.

Neem het volgende getallenvoorbeeld. De afstand van de zon tot de aarde bedraagt $150 \cdot 10^9$ m. De zon heeft een diameter van $1,4 \cdot 10^9$ m. Als een kleurfilter alleen de golflengte van 600 nm doorlaat, heeft het gefilterde licht een spatiële coherentiebreedte van:

$$B \cong \frac{\lambda \cdot D}{d} = \frac{600 \text{ nm} \cdot 150 \cdot 10^9 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^9 \text{ m}} = 64 \text{ } \mu\text{m}.$$

Opgaven bij § 11

Opgave 1

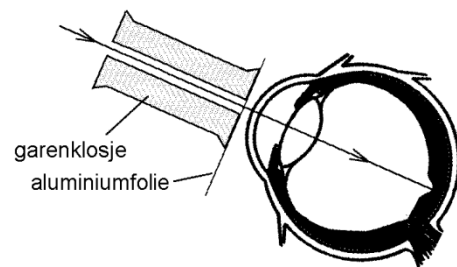
Een laserstraal heeft een frequentieband met een breedte van 2 MHz. Bereken de (temporele) coherentielengte.

Opgave 2

Een laser zendt een oranje lichtstraal uit met een golflengte van 605,8 nm binnen een golflengteband van 0,2 nm. Bereken de orde van grootte van de (temporele) coherentielengte.

Opgave 3

Deze opgave gaat over 'floaters'. Dat zijn kleine deeltjes die zich binnenin het oog vlakbij het netvlies bevinden. Je ziet ze als zwarte bolletjes of draadjes die meebewegen bij oogverdraaiingen. Ze zijn goed waarneembaar als je bijvoorbeeld naar de blauwe hemel kijkt. Floaters kunnen onder andere losse rode bloedcellen zijn. Door de osmotische druk neemt het omhullende vlies van zulke cellen een bolvorm aan. Op het netvlies kan dan een buigingspatroon ontstaan van concentrische cirkels. De figuur hiernaast laat een eenvoudige manier zien hoe je het buigingspatroon van rode bloedcellen kunt bestuderen. Je kijkt dan door een heel klein gaatje (pinhole) in aluminiumfolie dat tegen de onderkant van een garenklosje geplakt is. Leg kort uit wat het nut is van het kleine gaatje in het aluminiumfolie.

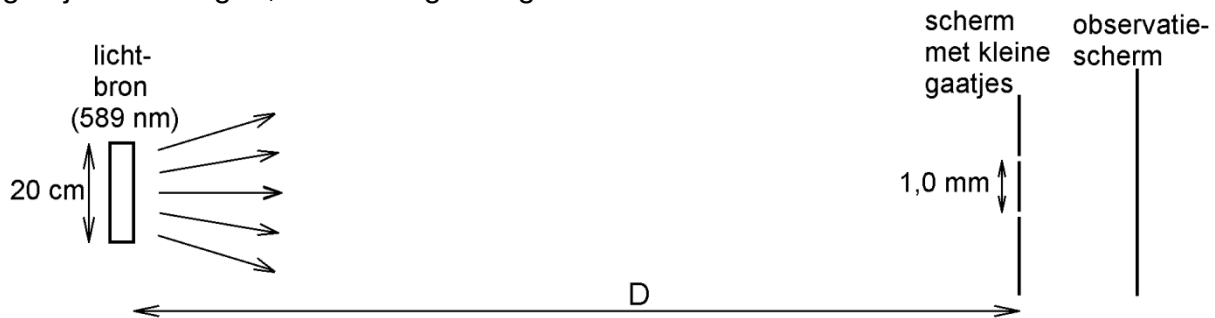


Opgave 4

Tijdens een heldere nacht is het volle maan. De maan heeft een diameter van $3,5 \cdot 10^6$ m. Op aarde laat je het maanlicht een kleurfilter van 500 nm passeren. De afstand tot de maan bedraagt $384 \cdot 10^6$ m. Bereken de spatiële coherentiebreedte voorbij dit kleurfilter.

Opgave 5

In de onderstaande figuur (niet op schaal getekend) beschijnt een 20 cm lange natriumlamp een scherm met twee kleine gaatjes (pinholes). De afstand tussen de gaatjes bedraagt 1,0 mm. De golflengte van het licht is 589 nm.



Bereken de minimale afstand D tussen de lamp en het scherm met gaatjes zodat er achter dit scherm een interferentiepatroon op het scherm zichtbaar is.

Opgave 6

Voor de temporele coherentielengte L geldt:

$$L \cong \frac{c}{\Delta f}$$

Hierin is c de lichtsnelheid en Δf de bandbreedte van de uitgezonden frequenties.

We kunnen deze formule omschrijven tot:

$$L \cong \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

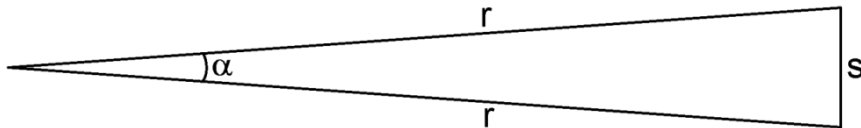
Hierin is λ de centrale uitgezonden golflengte en $\Delta \lambda$ de bandbreedte van de uitgezonden golflengtes.

Bewijs dat de tweede formule volgt uit de eerste formule.

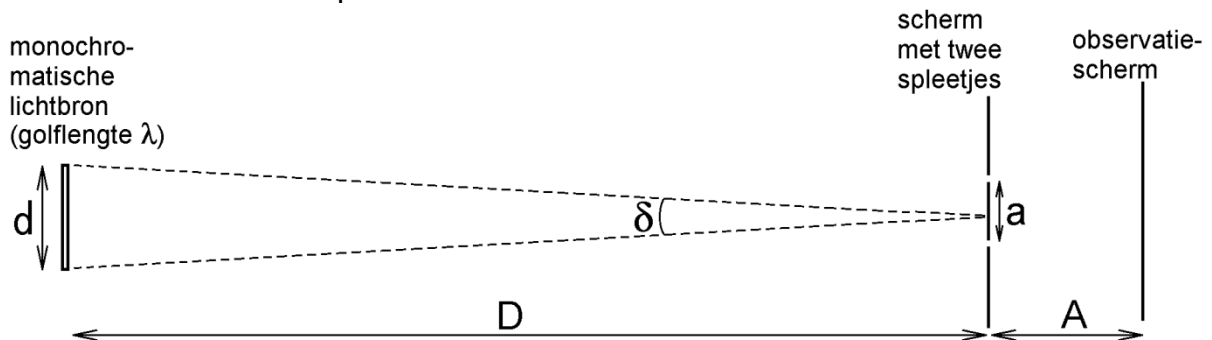
Gebruik daarbij de formules $c = f \cdot \lambda$ en de hieruit volgende formule $\frac{f}{\Delta f} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$.

Opgave 7 (hoort niet tot de lesstof)

In de volgende opgave zijn alle van belang zijnde hoeken klein en worden ze in radialen uitgedrukt. Dit heeft grote voordelen; zie bijvoorbeeld de onderstaande gelijkbenige driehoek waarin hoek α klein is. Er geldt dan: $\alpha = s / r$. Hierbij is s de lengte van de overstaande zijde en r de lengte van de aanliggende zijdes. Bij kleine hoeken geldt bovendien dat de sinus en de tangens van de hoek bij benadering gelijk zijn aan de hoek zelf (mits uitgedrukt in radialen).



In de onderstaande figuur valt het licht, afkomstig van een verticale lijnvormige monochromatische lichtbron, op een scherm met twee horizontale spleten. De lichtbron heeft lengte d en de afstand tot het scherm is D . Neem aan dat D veel groter is dan d (zeg een factor 100). Vanuit het scherm met spleetjes gezien is de openingshoek van de lichtbron δ . Neem ook aan dat de lichtbron bestaat uit zeer veel niet-coherente lichtpunten.



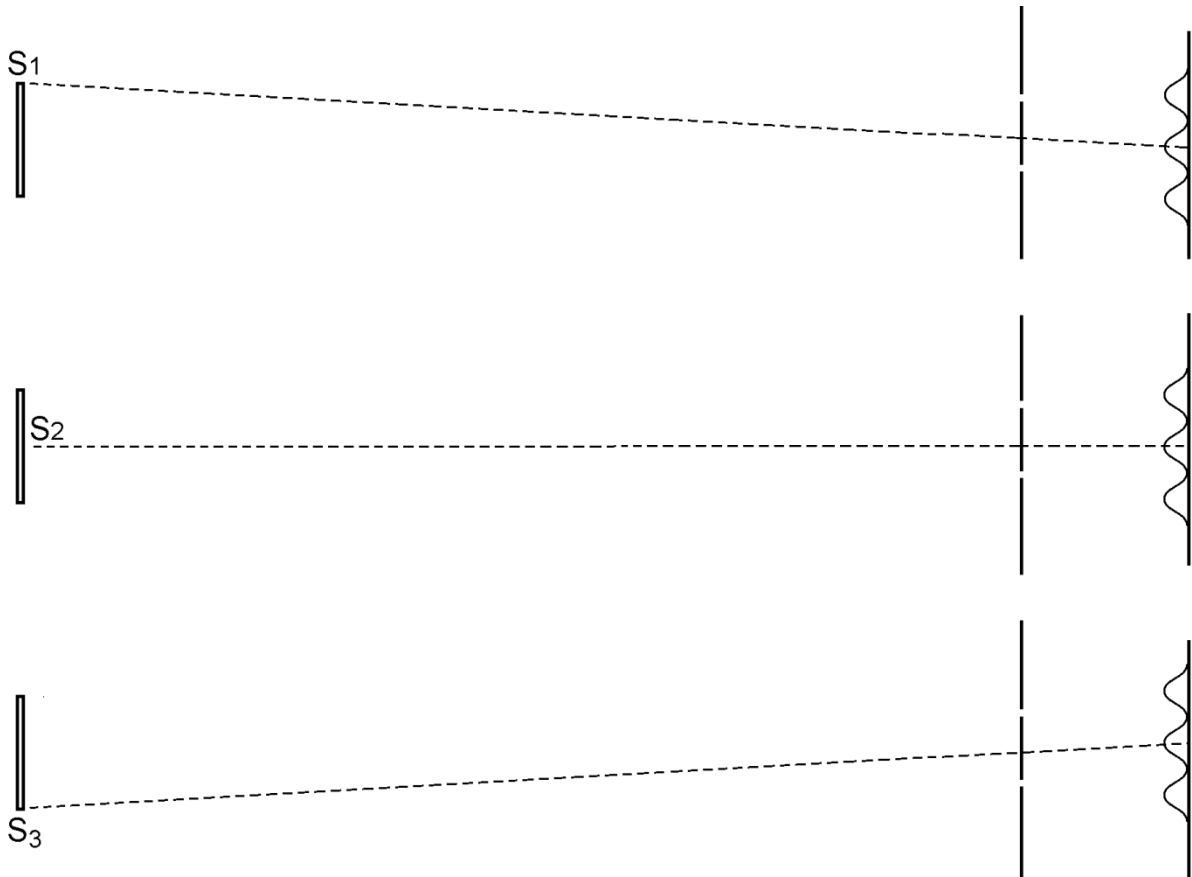
a.

Toon aan dat λ / δ gelijk is aan de spatiële coherentiebreedte (in deze opgave beter 'coherentiehoogte' genoemd) ter plekke van het scherm met spleetjes.

Om een interferentiepatroon op het observatiescherm te krijgen, moet de spleetafstand kleiner zijn dan de spatiële coherentiebreedte.

In formulevorm is dit: $a < \lambda / \delta$.

Hierna vinden we deze voorwaarde ook via een andere weg. Elk lichtpunt van de lichtbron brengt een duidelijk herkenbaar interferentiepatroon op het observatiescherm voort. De interferentiepatronen, behorend bij de verschillende lichtpunten, zijn echter ten opzichte van elkaar verschoven. Zie bijvoorbeeld de volgende drie figuren waarin de interferentiepatronen van drie lichtpunten S_1 , S_2 en S_3 zijn getekend. Deze verschuivingen leiden ertoe dat het resulterende interferentiepatroon vervaagt; het wordt als het ware uitgesmeerd. Zolang de verschuivingen echter kleiner zijn dan de periodieke structuur van de afzonderlijke interferentiepatronen, blijft het resulterende interferentiepatroon herkenbaar.



b.
Toon aan dat de interferentiepatronen van de uiterste lichtpunten S1 en S3 ten opzichte van elkaar zijn verschoven over een afstand $A\delta$.

c.
Toon aan dat $A(\lambda/a)$ de afstand tussen de maxima in de afzonderlijke interferentiepatronen op het observatiescherm is. Neem daarbij aan dat de afbuighoeken α zo klein zijn, dat $\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}$ vereenvoudigd kan worden tot

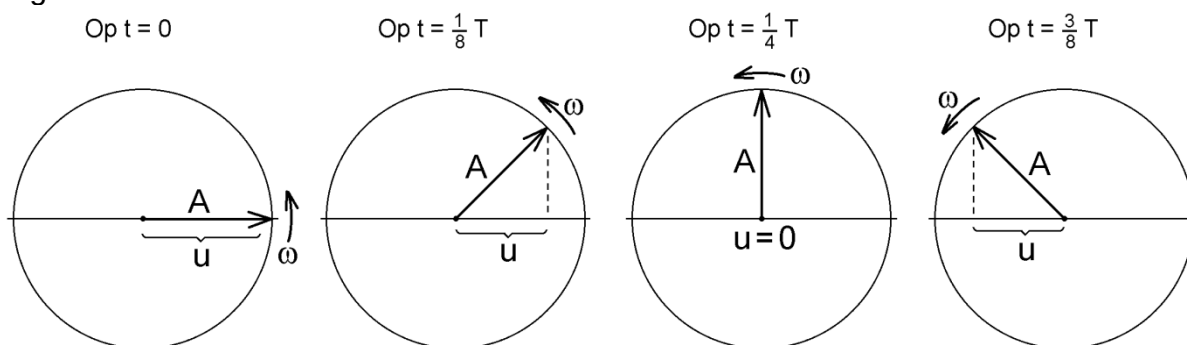
$$\alpha = \frac{n \cdot \lambda}{a}.$$

d.
Als je als eis stelt dat de bij b. gevonden verschuiving $A\delta$ kleiner moet zijn dan de bij c. gevonden afstand $A(\lambda/a)$, volgt daaruit dat $a < \lambda / \delta$. Laat dat zien.

Bijlagen

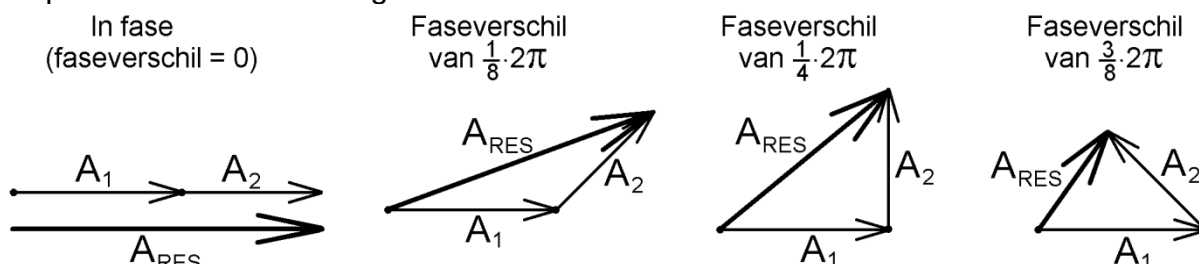
De resulterende amplitude van twee trillingsbronnen bepalen

Bij een harmonische trilling met amplitude A varieert de uitwijking u tussen $-A$ en A . In de volgende theorie gebruiken we de 'roterende amplitudevector'. Dat is een vector die vanuit de oorsprong naar een punt op de cirkel wijst met de oorsprong als middelpunt en straal A . De amplitudevector draait rond met een constante hoeksnelheid van $\omega = 2\pi/T$ waarbij T de trillingstijd is. Zie de onderstaande figuren waarin de amplitudevector op vier verschillende tijdstippen t getekend is. De uitwijking u kan op een willekeurig tijdstip bepaald worden door de amplitudevector te projecteren op de (horizontale) x -as. Op het vierde tijdstip ($t = (3/8)T$) is de uitwijking negatief.



Als een punt gelijktijdig twee trillingen met dezelfde frequentie uitvoert, kan de resulterende amplitude bepaald worden door de twee amplitudevectoren te combineren. Daarbij moet wel het faseverschil tussen beide trillingen in rekening gebracht worden. Een faseverschil van 2π correspondeert hierbij met één volledige trilling. Een faseverschil tussen twee trillingen van 0 of $n \cdot 2\pi$ (met $n =$ geheel getal) betekent dat beide trillingen in fase zijn. Een faseverschil van π wil zeggen dat beide trillingen in tegenfase zijn.

In de onderstaande figuren worden twee amplitudevectoren A_1 en A_2 gecombineerd waarbij het faseverschil achtereenvolgens gelijk is aan 0, $(1/8) \cdot 2\pi$, $(1/4) \cdot 2\pi$ en $(3/8) \cdot 2\pi$. In de laatste drie figuren loopt A_2 in fase vóór op A_1 . De resulterende amplitude is met A_{RES} aangeduid.



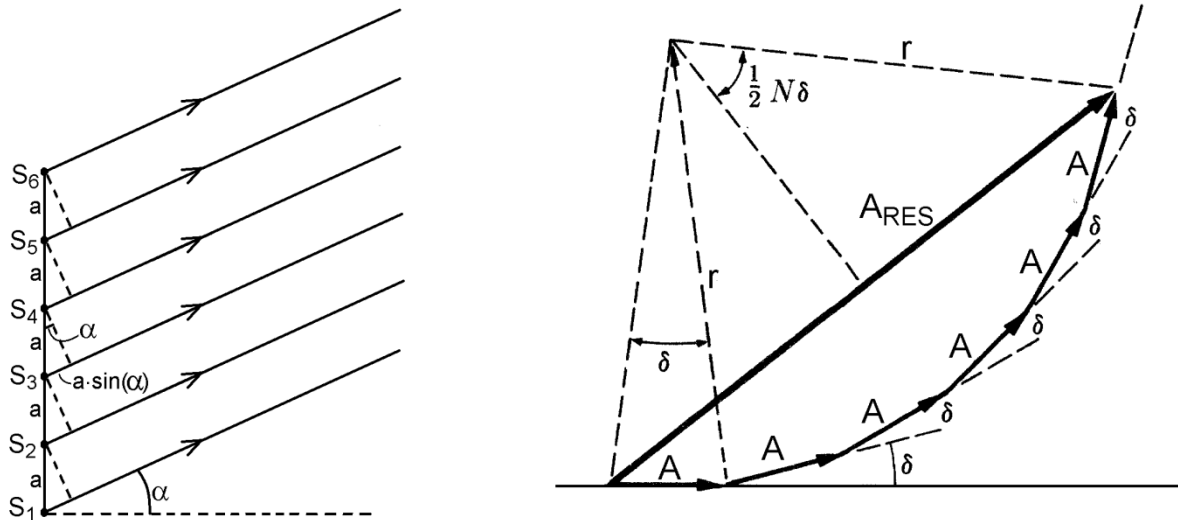
Bij de volgende bewijzen berekenen we de resulterende amplitude van een combinatie van golven die door trillingsbronnen worden opgewekt. Voor het faseverschil δ tussen twee golven op een bepaalde plaats gebruiken we de volgende uitdrukking.

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{\Delta}{\lambda}$$

Hierin is Δ het verschil in de af te leggen afstanden van de golven.

Een rij van N puntvormige trillingsbronnen

In de onderstaande linker figuur liggen zes puntbronnen (S_1 tot en met S_6) op een rechte lijn en hebben een onderlinge afstand a . Alle bronnen trillen met dezelfde frequentie en amplitude en zijn in fase met elkaar. We zijn geïnteresseerd in de amplitude bij punt P dat zeer ver van de bronnen verwijderd is (het verre veld) en in de richting van hoek α ligt. Elk van de zes bronnen wekt een golf op die in P amplitude A heeft. De golven komen echter niet in fase bij P aan. Daarom moeten we de amplitudes optellen met inachtneming van het faseverschil, zoals in de rechter figuur is weergegeven.



De afstand tussen bron S_k en P is groter dan de afstand tussen bron S_{k+1} en P. Het weglengteverschil bedraagt $a \cdot \sin(\alpha)$. Voor het faseverschil δ tussen de door deze bronnen opgewekte golven is daarom:

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{\lambda}.$$

Deze hoek is in de rechter figuur een aantal maal aangegeven. In de volgende analyse gaan we uit van N bronnen. In ons voorbeeld is N gelijk aan 6.

Uit de driehoek met de scherpe tophoek (δ) volgt:

$$\frac{A}{2} = r \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Uit de driehoek met tophoek $(1/2) \cdot N \cdot \delta$ volgt:

$$\frac{A_{RES}}{2} = r \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot N \cdot \delta\right).$$

Uit de bovenstaande formules volgt:

$$A_{RES} = A \cdot \frac{\sin\left(N\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}.$$

Als I de resulterende intensiteit en I_0 de intensiteit van één bron is, geldt:

$$I = I_0 \cdot \left[\frac{\sin\left(N\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\alpha)\right)} \right]^2$$

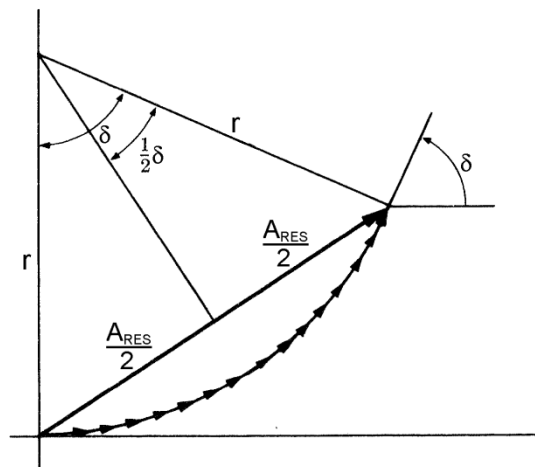
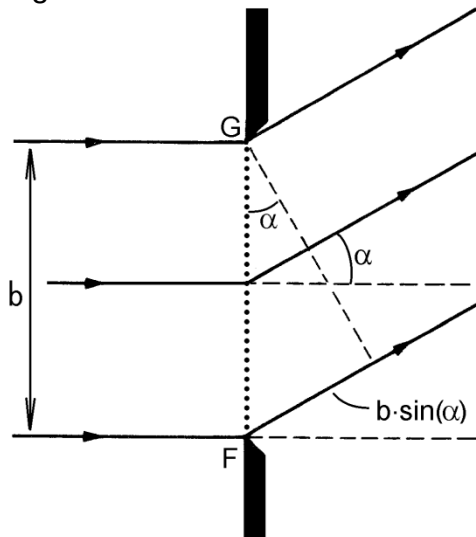
De intensiteit is maximaal bij: $\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}$ met $n =$ geheel getal.

Bij deze waarden zijn teller en noemer nul in de uitdrukking voor de intensiteit I . Uit de stelling van l'Hôpital volgt dat de maximum waarde voor I gelijk is aan $N^2 \cdot I_0$.

Het totaal uitgestraalde vermogen is evenredig met N . Als de piekhoogtes evenredig zijn met N^2 , moeten de piekbreedtes omgekeerd evenredig zijn met N .

Diffractionpatroon van een lange smalle spleet

In de onderstaande linker figuur vallen vlakke golven loodrecht op een lange smalle spleet met uiteinden F en G en breedte b . Bij de spleet vindt diffractie plaats. In de opening bevinden zich secundaire bronnen die in fase trillen. We zijn geïnteresseerd in de amplitude bij punt P dat zich zeer ver van de spleet bevindt (verre veld) en in de richting van hoek α ligt. Elke secundaire bron (waarvan er in principe oneindig veel zijn) levert in punt P een golf met een kleine amplitude. Hoe dichter de secundaire bron zich bij punt G bevindt, des te korter is de afstand tot punt P is. Hierdoor komen de golven van de secundaire bronnen niet in fase bij P aan.



In de rechter figuur tellen we alle (zeer kleine) amplitudevectoren op met inachtneming van faseverschillen. Er ontstaat dan een cirkelboog. Voor het maximale faseverschil δ tussen de uiterste secundaire bronnen geldt:

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\lambda}.$$

Als de afbuighoek nul is (dus $\alpha = 0$), komen de golven van alle secundaire bronnen in fase bij P aan en is de amplitude maximaal. Deze maximale amplitude wordt hier met A_0 aangeduid. Deze A_0 zou je in de rechter figuur krijgen als je alle amplitudevectoren in elkaars verlengde zou leggen en komt overeen met de lengte van de cirkelboog. Dus geldt:

$$A_0 = r \cdot \delta.$$

Uit de driehoek met tophoek $(1/2) \cdot \delta$ volgt dat:

$$\frac{A_{RES}}{2} = r \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Uit de bovenstaande vergelijkingen volgt nu:

$$A_{RES} = A_0 \frac{\sin(\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha))}{\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)}.$$

Voor de intensiteitsverdeling geldt:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha))}{\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)} \right]^2.$$

De intensiteit is nul als geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{b} \text{ met } n = +1, -1, +2, -2 \text{ enzovoort.}$$

Bewijs dat twee complementaire tralies hetzelfde diffractiepatroon in het verre veld hebben

Stel dat het oorspronkelijke tralie, tralie 1 genoemd, een tralieconstante a heeft en spleetbreedte b. Het complementaire tralie, tralie 2 genoemd, heeft dan tralieconstante a en spleetbreedte a-b.

Beide tralies hebben dezelfde tralieconstante a. Ten gevolge van interfererende spleten treden maxima daarom op bij hoeken α waarvoor geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}.$$

Het verschil tussen tralie 1 en tralie 2 zit 'm in de spleetbreedte. Dit heeft gevolgen voor de hoeveelheid doorgelaten licht en de mate van diffractie. Als we het aspect van interferentie buiten beschouwing laten, geldt voor de intensiteit in het verre veld van tralie 1:

$$I_1 = k \cdot b^2 \cdot \left[\frac{\sin(\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha))}{\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)} \right]^2.$$

In deze vergelijking is k een evenredigheidsconstante en brengt de factor b^2 de hoeveelheid doorgelaten licht in rekening.

Op dezelfde manier geldt voor tralie 2:

$$I_2 = k \cdot (a-b)^2 \cdot \left[\frac{\sin(\pi \cdot \frac{a-b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha))}{\pi \cdot \frac{a-b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)} \right]^2.$$

Volgens het principe van Babinet is het doorgelaten diffractiepatroon voor beide tralies gelijk. Dan moet dus gelden $I_1 = I_2$.

Bij de interferentiemaxima moet dan dus gelden:

$$k \cdot b^2 \cdot \left[\frac{\sin(\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha))}{\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)} \right]^2 = k \cdot (a-b)^2 \cdot \left[\frac{\sin(\pi \cdot \frac{a-b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha))}{\pi \cdot \frac{a-b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)} \right]^2$$

Als $\sin(\alpha)$ niet gelijk is aan nul, kan deze vergelijking worden vereenvoudigd tot:

$$\left[\sin(\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)) \right]^2 = \left[\sin(\pi \cdot \frac{a-b}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)) \right]^2$$

Substitutie van $\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}$ geeft:

$$\left[\sin(\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \frac{n \cdot \lambda}{a}) \right]^2 = \left[\sin(\pi \cdot \frac{a-b}{\lambda} \cdot \frac{n \cdot \lambda}{a}) \right]^2$$

Dit kan vereenvoudigd worden tot:

$$\left[\sin(\pi \cdot n \cdot \frac{b}{a}) \right]^2 = \left[\sin(\pi \cdot n \cdot (1 - \frac{b}{a})) \right]^2$$

Aan de laatste vergelijking wordt voldaan voor alle n . Echter, $n = 0$ is eerder uitgesloten vanwege de aanname dat $\sin(\alpha)$ ongelijk is aan nul.